Centres étrangers juin 2003

EXERCICE 1 5 points
Commun à tous les candidats

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

1. Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

a. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

b. Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n > \dfrac{1}{2}$.

c. Trouver le plus petit entier N tel que si $n \geq N$, $v_n < \dfrac{3}{4}$.

d. En déduire que si $n \geq N$, alors $u_{n+1} < \dfrac{3}{4} u_n$.

On pose pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n = u_5 + u_6 + \cdots + u_n$.

2. On se propose démontrer que la suite $(S_n)_{n \geq 5}$ est convergente.

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n \leq \left[1 + \dfrac{3}{4} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + ... + \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5$.

c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n \leq 4\, u_5$.

3. Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 5}$ est croissante et en déduire qu'elle converge.

EXERCICE 2 6 points
Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc.

Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement.

On rappelle que la loi de probabilité est alors définie par : $p(D \leq A) = \displaystyle\int_0^A \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}}\, dx$.

Dans tout l'exercice, les résultats numériques seront arrondis au millième.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

a. comprise entre 50 et 100 km ;

b. supérieure 300 km.

2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 kilomètres sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?

3. Détermination de la distance moyenne parcourue sans incident.

a. Au moyen d'une intégration par parties, calculer : $I(A) = \displaystyle\int_0^A \frac{1}{82} x\, e^{-\frac{x}{82}}\, dx$ où A est un nombre réel positif.

b. Calculer la limite de $I(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$. (Cette limite représente la distance moyenne cherchée).

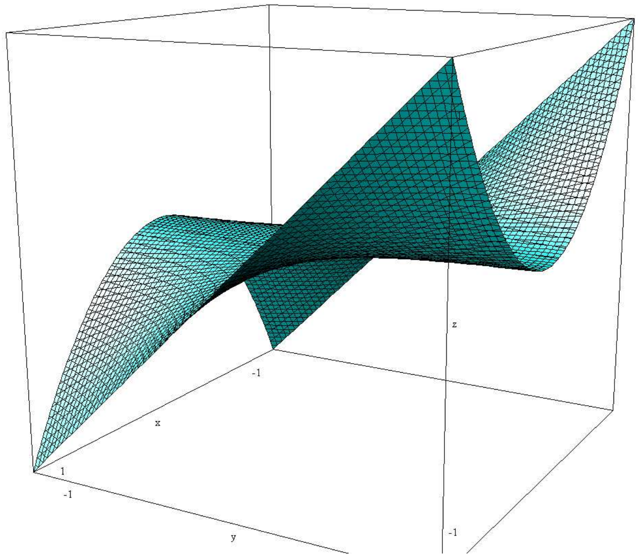
4. L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{82}$.

d étant un réel positif, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

a. Montrer que X_d suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $e^{-\lambda d}$.

b. Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

EXERCICE 2 6 points Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la surface **T** d'équation :
$x^2 y = z$ avec $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$.
La figure ci-contre est une représentation de la surface **T**, dans le cube de centre O et de côté 2.

1. Éléments de symétrie de la surface **T**.

a. Montrer que si le point $M(x, y, z)$ appartient à **T**, alors le point $M'(-x, y, z)$ appartient aussi à **T**. En déduire un plan de symétrie de **T**.

b. Montrer que l'origine O du repère est centre de symétrie de **T**.

2. Intersections de la surface **T** avec des plans parallèles aux axes.

a. Déterminer la nature des courbes d'intersection de **T** avec les plans parallèles au plan (x O z).

b. Déterminer la nature des courbes d'intersection de **T** avec les plans parallèles au plan (y O z).

3. Intersections de la surface **T** avec les plans parallèles au plan (x O y) d'équations $z = k$, avec $k \in [0 ; 1]$.

a. Déterminer l'intersection de la surface **T** et du plan d'équation $z = 0$.

b. Pour $k > 0$ on note K le point de coordonnées $(0, 0, k)$. Déterminer, dans le repère $(K ; \vec{i}, \vec{j})$, l'équation de la courbe intersection de **T** et du plan d'équation $z = k$.

c. Tracer l'allure de cette courbe dans le repère $(K ; \vec{i}, \vec{j})$. On précisera en particulier les coordonnées des extrémités de l'arc.

4. On note (D) le domaine formé des points du cube unité situés sous la surface **T**.
(D) = $\{ M(x, y, z) \in (E)$ avec $0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq 1 ; 0 \leq z \leq x^2 y$.

a. Pour $0 < k \leq 1$, le plan d'équation $z = k$ coupe le domaine (D) selon une surface qu'on peut visualiser sur le graphique de la **question 3 *c***.

C'est l'ensemble des points M du cube unité, de coordonnées (x, y, z) tels que $y \geq \dfrac{k}{x^2}$ et $z = k$.

Calculer en fonction de k l'aire $S(k)$ exprimée en unités d'aire, de cette surface.

b. On pose $S(0) = 1$; calculer en unités de volume, le volume V du domaine (D). On rappelle que $V = \int_0^1 S(k)\, \mathrm{d}k$.

PROBLÈME 9 points

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle I = $]-2 ; +\infty[$ par : $f(x) = 1 + x \ln(x + 2)$.

On note C_f la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 4 cm).

I. Étude de la fonction *f*

1. Étude des variations de la dérivée f'.

a. f' désigne la fonction dérivée première de f et f'' la fonction dérivée seconde. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]-2 ; +\infty[$.

b. Étudier les variations de f' sur l'intervalle $]-2 ; +\infty[$.

c. Déterminer les limites de f' en -2 et en $+\infty$.

2. Étude du signe de $f'(x)$.

a. Montrer que sur l'intervalle = $]-2 ; +\infty[$ l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[-0,6 ; -0,5]$.

b. En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

3. Étude des variations de f

a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-2 ; +\infty[$.

b. Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

II. Position de la courbe(C_f) par rapport à ses tangentes

Soit x_0 un réel appartenant l'intervalle $]-2 ; +\infty[$, on appelle T_{x_0} la tangente à C_f au point d'abscisse x_0.

On note, pour x appartenant à l'intervalle $]-2 ; +\infty[$, $d(x) = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]$.

1. Étude des variations de d.

a. Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-2 ; +\infty[$, $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$.

b. En utilisant la croissance de la fonction f', donner le signe de $d'(x)$ selon les valeurs de x. En déduire les variations de d sur l'intervalle $]-2 ; +\infty[$.

2. Déterminer la position relative de C_f et de T_{x_0}.

III. Tracés dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

1. Déterminer une équation de la droite T_0, tangente à C_f au point d'abscisse 0 ; tracer T_0.

2. Trouver les réels x_0 pour lesquels les tangentes T_{x_0} passent par l'origine du repère puis tracer ces droites.

3. Tracer la courbe C_f pour les valeurs de x comprises entre -1 et 2. On prendra pour α la valeur $-0,54$ et pour $f(\alpha)$ la valeur 0,8.

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

1. *a.* $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ et $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$ donc $v_n = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^n}{n^2} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 \times \dfrac{1}{2} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 \times \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

b. Pour tout entier naturel $n > 0$, $1+\dfrac{1}{n} > 1$ donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 > 1$ donc $v_n > \dfrac{1}{2}$.

c. $v_n < \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 \times \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 < \dfrac{3}{2}$

or $1+\dfrac{1}{n} > 1$ donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 1 < 1+\dfrac{1}{n} < \sqrt{\dfrac{3}{2}} \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{n} < \sqrt{\dfrac{3}{2}} - 1 \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{2}}-1} \Leftrightarrow n \geq 5$

Le plus petit entier N tel que si $n \geq N$, $v_n < \dfrac{3}{4}$ est donc $N = 5$.

d. si $n \geq 5$, alors $v_n < \dfrac{3}{4}$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{3}{4}$ or $u_n > 0$ donc $u_{n+1} < \dfrac{3}{4} u_n$.

2. *a.* Si $n = 5$, $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^0 u_5 = u_5$ donc $u_5 \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$. La propriété est vraie pour $n = 5$

Montrons que pour tout $n \geq 5$, si $u_n \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ alors $u_{n+1} \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1-5} u_5$.

si $n \geq 5$, alors $v_n < \dfrac{3}{4}$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{3}{4}$ or $u_n > 0$ donc $u_{n+1} < \dfrac{3}{4} u_n$ donc $u_{n+1} < \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$.

si $n \geq 5$, $u_{n+1} \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1-5} u_5$. La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout entier naturel $n \geq 5$.

b. Si $n = 5$, $S_5 = u_5$ or $\left[1+\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5 = u_5$ donc $S_5 \leq \left[1+\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5$

La propriété est vraie pour $n = 5$

Montrons que pour tout $n \geq 5$, si $S_n \leq \left[1+\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5$ alors $S_{n+1} \leq \left[1+\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1-5}\right] u_5$.

si $n \geq 5$, alors $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$

or $S_n \leq \left[1+\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5$ et $u_{n+1} \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1-5} u_5$ donc $S_{n+1} \leq \left[1+\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1-5}\right] u_5$.

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n \leq \left[1+\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5$.

c. si $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \ldots + q^p = \dfrac{1-q^{p+1}}{1-q}$, donc en appliquant ceci à $q = \dfrac{3}{4}$ et $p = n - 5$:

$\left[1+\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}\right] = \dfrac{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1-5}}{1-\dfrac{3}{4}} = 4\left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-4}\right)$ donc $\left[1+\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-5}\right] \leq 4$ donc pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n \leq 4\, u_5$.

3. $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$ or pour tout entier n non nul, $u_n > 0$ donc $S_{n+1} - S_n > 0$, la suite $(S_n)_{n\geq 5}$ est croissante, de plus elle est majorée par $4\, u_5$ donc elle converge.

EXERCICE 2 6 points Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$p(D \leq A) = \int_0^A \frac{1}{82}\,e^{-\frac{x}{82}}\,dx = 1 - e^{-\frac{A}{82}}$ et $p(D \geq A) = e^{-\frac{A}{82}}$

1. *a.* $p(50 \leq D \leq 100) = p(D \leq 100) - p(D \leq 50) = 1 - e^{-\frac{100}{82}} - \left(1 - e^{-\frac{50}{82}}\right) = e^{-\frac{50}{82}} - e^{-\frac{100}{82}}$ soit $p(50 \leq D \leq 100) \approx 0{,}248$.

b. $p(D > 300) = e^{-\frac{300}{82}}$ donc $p(D > 300) \approx 0{,}026$

2. D suit une loi de durée de vie sans vieillissement donc $p_{(D > 350)}(D > 375) = p(D > 25) = e^{-\frac{25}{82}}$ donc $p \approx 0{,}737$.

3. *a.* Soit $u'(x) = \frac{1}{82}\,e^{-\frac{x}{82}}$ alors $u(x) = -\,e^{-\frac{x}{82}}$

Soit $v(x) = x$ alors $v'(x) = 1$

$I(A) = \int_0^A \frac{1}{82}\,x\,e^{-\frac{x}{82}}\,dx = \left[-x\,e^{-\frac{x}{82}}\right]_0^A - \int_0^A -e^{-\frac{x}{82}}\,dx$

$I(A) = \left[-x\,e^{-\frac{x}{82}}\right]_0^A - \left[82\,e^{-\frac{x}{82}}\right]_0^A = -A\,e^{-\frac{A}{82}} - (82\,e^{-\frac{A}{82}} - 82)$

$I(A) = -A\,e^{-\frac{A}{82}} - 82\,e^{-\frac{A}{82}} + 82$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{A \to +\infty} A\,e^{-\frac{A}{82}} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{A \to +\infty} e^{-\frac{A}{82}} = 0$ donc $\lim\limits_{A \to +\infty} I(A) = 82$

4. *a.* On *a* une succession de N_0 expériences aléatoires identiques et indépendantes.
Chacune d'elles possède deux issues :

réussite : l'autocar n'*a* subi aucun incident après avoir parcouru *d* kilomètres ($p = p(D > d) = e^{-\lambda d}$)

échec : l'autocar *a* subi au moins un incident après avoir parcouru *d* kilomètres ($q = p(D \leq d) = 1 - e^{-\lambda d}$)

donc la variable aléatoire X_d égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru *d* kilomètres, suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $e^{-\lambda d}$.

b. Le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru *d* kilomètres est $E(X_d) = N_0\,e^{-\lambda d}$.

EXERCICE 2 6 points Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.* si le point $M(x, y, z)$ appartient à **T**, alors $x^2 y = z$

Soit $x' = -x$; $y' = y$ et $z' = z$ donc $x'^2 y' = x^2 y = z$ donc $x'^2 y' = z'$ donc Le point $M'(-x, y, z)$ appartient aussi à **T**.

M' est le symétrique de M par rapport au plan (y O z) donc le plan (y O z) est un plan de symétrie de **T**.

b. si le point $M(x, y, z)$ appartient à **T**, alors $x^2 y = z$

Le symétrique de M par rapport à O, est le point M' de coordonnées (x' ; y' ; z') avec $x' = -x$; $y' = -y$ et $z' = -z$

$x'^2 y' = -x^2 y = -z$ donc $x'^2 y' = z'$

Le point $M'(-x, -y, -z)$ appartient aussi à **T**. L'origine O du repère est centre de symétrie de **T**.

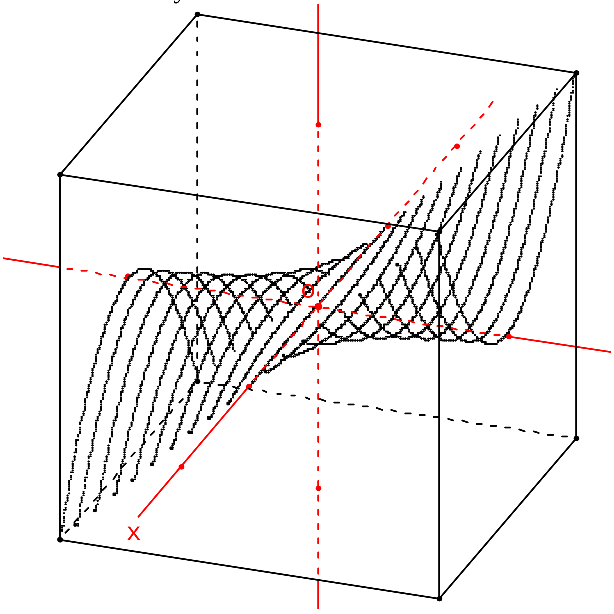
2. *a.* Un plan parallèle au plan (x O z) *a* une équation de la forme $y = k$.

Si le point M appartient au plan (x O z), il a pour coordonnées (x ; k ; z)

$-1 \leq y \leq 1$ donc si $k \notin [-1 ; 1]$, la surface et le plan n'ont pas de point commun

si $k \in [-1 ; 1]$, et si M appartient également à la surface **T**, alors $x^2 \times k = z$ donc $z = k\,x^2$

L'intersection de **T** avec un plan parallèle au plan (x O z) est un arc de parabole.



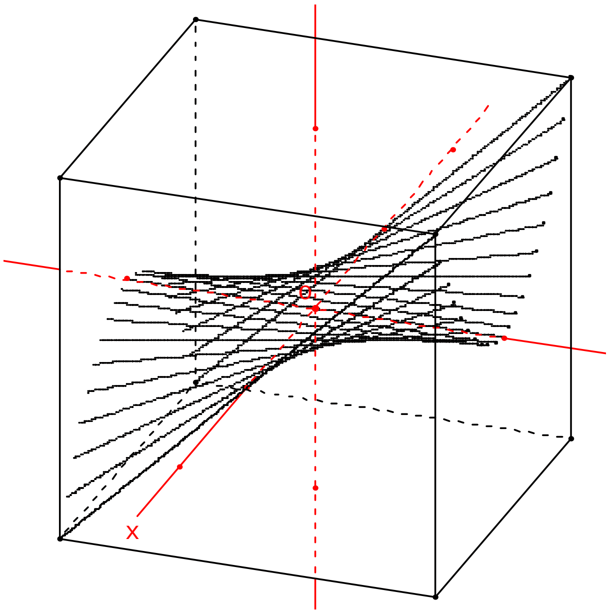
b. Un plan parallèle au plan (y O z) *a* une équation de la forme $x = k$.

Si le point M appartient au plan (y O z). il a pour coordonnées (k ; y ; z)

$-1 \leq x \leq 1$ donc si $k \notin [-1 ; 1]$, la surface et le plan n'ont pas de point commun

si $k \in [-1 ; 1]$, et si M appartient également à la surface **T**, alors $k^2 \times y = z$ donc $z = k^2 y$

L'intersection de **T** avec un plan parallèle au plan (y O z) est un segment de droite.



3. *a.* Si le point M appartient au plan d'équation $z = 0$, il a pour coordonnées (x ; y ; 0)

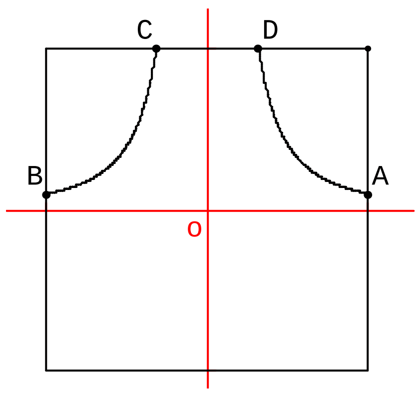
Si M appartient également à la surface **T**, alors $x^2 \times y = 0$ donc soit $x = 0$ soit $y = 0$

L'intersection de **T** avec le plan d'équation $z = 0$, est la réunion de deux droites d'équations : $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, il d'agit des axes (O y) et (O x).

b. Si le point M appartient au plan d'équation $z = k$, il a pour coordonnées (x ; y ; k)

Si M appartient également à la surface **T**, alors $x^2 \times y = k$ donc soit $x^2 y = k$

Dans le repère $(K ; \vec{i}, \vec{j})$, l'équation de la courbe intersection de **T** et du plan d'équation $z = k$ est $x^2 y = k$ ou encore $y = \dfrac{k}{x^2}$.



c. $-1 \leq y \leq 1$ donc $-1 \leq \dfrac{k}{x^2} \leq 1$ or $k \in [0 ; 1]$ donc $x^2 \geq k$

soit $x \in \left[-1 ; -\sqrt{k}\right] \cup \left[\sqrt{k} ; 1\right]$

Les extrémités des arcs sont les points de coordonnées A(1 ; k) B($-$ 1 ; k) C($-\sqrt{k}$; 1) et D($\sqrt{k}$; 1)

4. *a.* $\mathrm{S}(k) = \displaystyle\int_{\sqrt{k}}^{1} \left(1 - \frac{k}{x^2}\right) \mathrm{d}\,x = \left[x - \frac{k}{x}\right]_{\sqrt{k}}^{1} = 1 - k - \left(\sqrt{k} - \frac{k}{\sqrt{k}}\right) = 1 - k.$

b. $\mathrm{V} = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{S}(k)\,\mathrm{d}\,k = \left[k - \frac{1}{2}k^2\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ unités de volume

PROBLÈME 9 points

I. Étude de la fonction *f*

1. *a.* $f\,'(x) = \ln(x+2) + \dfrac{x}{x+2} = \ln(x+2) + 1 - \dfrac{2}{x+2}$

$f\,''(x) = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{2}{(x+2)^2}$;

b. $f\,''$ est la somme de deux termes strictement positifs donc est strictement positive, $f\,'$ est strictement croissante sur l'intervalle $\mathrm{I} =]-2\,;+\infty[$.

c. $f\,'(x) = \dfrac{(x+2)\ln(x+2)+x}{x+2}$ or $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to -2^+} (x+2)\ln(x+2) = 0$ et $\lim\limits_{x\to -2^+} x + (x+2)\ln(x+2) = -2$

$\lim\limits_{x\to -2^+} x+2 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to -2^+} f\,'(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x+2) = +\infty$; $\dfrac{x}{x+2} = 1 - \dfrac{2}{x+2}$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x+2} = 1$

donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f\,'(x) = +\infty$

2. *a.* $f\,'$ est une fonction définie continue strictement croissante sur I ; $f\,'(\mathrm{I}) = \mathbb{R}$ donc sur l'intervalle $=]-2\,;+\infty[$ l'équation $f\,'(x) = 0$ admet une solution unique α.

$f\,'(-0{,}6) \approx -0{,}09$ et $f\,'(-0{,}5) \approx 0{,}07$ donc α appartient à l'intervalle $[-0{,}6\,;-0{,}5]$.

b. $f\,'$ est strictement croissante sur l'intervalle $\mathrm{I} =]-2\,;+\infty[$, s'annule en α donc si $-2 < x < \alpha$ alors $f\,'(x) < 0$; $f\,'(\alpha) = 0$ et si $x > \alpha$ alors $f\,'(x) > 0$

3. *a.* si $-2 < x < \alpha$ alors $f\,'(x) < 0$; $f\,'(\alpha) = 0$ et si $x > \alpha$ alors $f\,'(x) > 0$ donc f est décroissante sur $]-2\,;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$.

b. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x+2) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -2^+} \ln(x+2) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$

c.

x	-2			α		$+\infty$
$f\,'(x)$	‖		$-$	0	$+$	
f	‖	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

II. Position de la courbe(C_f) par rapport à ses tangentes

1. *a.* x_0 est une constante donc $f\,'(x_0)$ et $f(x_0)$ sont des constantes donc pour tout x appartenant à l'intervalle $]-2\,;+\infty[$, $d'(x) = f\,'(x) - f\,'(x_0)$.

b. $f\,'$ est une fonction définie continue strictement croissante sur I, donc si $-2 < x < x_0$ alors $f\,'(x) < f\,'(x_0)$ donc $d'(x) < 0$
si $x > x_0$ alors $f\,'(x) > f\,'(x_0)$ donc $d'(x) > 0$, de plus $d'(x_0) = 0$

x	-2			x_0		$+\infty$
$d'(x)$	‖		$-$	0	$+$	
d	‖	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

donc pour tout x de I, $d(x) \geq 0$

2. pour tout x de I, $d(x) \geq 0$, donc la courbe est au-dessus de la tangente à C_f au point d'abscisse x_0.

III. Tracés dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j})$

1. $f(0) = 1$ et $f\,'(0) = \ln 2$ donc T_0 a pour équation $y = x\ln 2 + 1$

2. T_{x_0} a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

T_{x_0} passe par l'origine du repère si et seulement si $-x_0 f'(x_0) + f(x_0) = 0$

soit $-x\ln(x+2) - \dfrac{x^2}{x+2} + x\ln(x+2) + 1 = 0$ soit $1 - \dfrac{x^2}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ avec $x \in\ ]-2\,;+\infty[$.

$x^2 - x - 2 = 0$ admet pour solutions $x = -1$ et $x = 2$

T_{-1} et T_2 sont donc les seules tangentes à la courbe passant par l'origine du repère.

3.