INSPECTION D'ACADEMIE DE THIES **COMMUNE DE THIES**

ANNEE ACADEMIQUE : 2015/2016 **CLASSE : TS2**

COMPOSITION DU SECOND SEMESTRE

EPREUVE MATHEMATIQUES

DUREE : 4H

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.

Exercice 1 : *3,5 points*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 2cm.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2-2(2+\sqrt{3})z+4(2+\sqrt{3})=0$. **0,5 pt**

2. Soient z_1 la solution de l'équation ayant la partie imaginaire positive et z_2 l'autre solution.

a) Placer dans le plan complexe les points A d'affixe z_1 et B d'affixe z_2. **0,5 pt**

b) Vérifier que $\frac{z_2}{z_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$. **0,5 pt**

c) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_2}{z_1}$. **0,5 pt**

d) Déduire du résultat précédent l'angle de la rotation de centre O qui transforme A en B. **0,5 pt**

3. Déterminer l'affixe z_3 du point C milieu de $[AB]$. Quelle est la nature du triangle OCA ? **1 pt**

Exercice 2 : *3,5 pts*

1. Pour x ≥ 0, calculer à l'aide d'une intégration par parties : $f(x)=\int_0^x 2(-t+1)e^{-t}\,dt$ **0,5 pt**

2. On considère l'équation différentielle(E): $4g''(x)+4g'(x)+g(x)=2(x-4)e^{-x}$.

a) Vérifier que f est une solution de (E). **0,25 pt**

b) On pose $g(x)=h(x)+f(x)$. Montrer que g est solution de (E) si et seulement si h est solution de l'équation différentielle (E') : $4h''(x)+4h'(x)+h(x)=0$. **1 pt**

c) Résoudre (E') en déduire l'expression de g(x). **1 pt**

d) Déterminer la solution g de (E) dont la courbe présente un extremum au point A (0, 1). **0,75 pt**

Exercice 3 : 2,5 *pts*

Soit la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par : $U_n=\int_n^{n+1}2e^{-2x}dx$.

1.a) Calculer U_0 . **0,5 pt**

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n=e^{-2n}\left(1-e^{-2}\right)$. **0,5 pt**

2. Démontre que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. **0,5 pt**

3. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n=U_0+U_1+\cdots+U_n$

a) Calculer S_n en fonction de n. **0,5 pt**

b) Quelle est la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$. **0,5 pt**

Problème : 10,5 pts

Soit f la fonction définie par f(x) = $\begin{cases} x^2 ln\left(\frac{x-1}{x}\right) & si\ \ x<0 \\ xe\ -^{x^2} & si\ x\geq 0 \end{cases}$

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $]-\infty;0[$ par $g(x)=2\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$. **0,25+0,25 pt**

2. Montrer que pour tout *x* de $]-\infty;0[$, $g'(x)=\frac{x-2}{x(x-1)^2}$. **0,5 pt**

3. Dresser le tableau de variation de g, puis en déduire le signe de $g(x)$. **0,5 pt**

Partie B :

1. Justifier que $D_f = IR$. **0,25 pt**

2. Etablir que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Etudier la continuité et la dérivabilité de *f* en 0. **0,5pt+0,5pt+0,5pt**

3. Montrer que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ et déterminer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. **0,5pt+0,25 pt**

4. Montrer que pour tout x de $]-\infty;0[$, $f'(x)=xg(x)$ et en déduire le signe de $f'(x)$

sur $]-\infty;0[$. **0,5 pt**

5. Achever l'étude de f puis dresser son tableau de variation. **1 pt**

6. Etudier la blanche infinie en $-\infty$. **0,5 pt**

7. Tracer (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2cm. **1 pt**

Partie C :

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I=\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$

1. Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera. **0,5 pt**

2. h^{-1} est-elle dérivable en $y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$? **0,5 pt**

h^{-1} est-elle dérivable en $h(1)$? Si oui, calculer ($h^{-1})'[h(1)]$ **0,5pt+0,5pt**

3. Construire la courbe $(C_{h^{-1}})$ de h^{-1} dans le même repère. **0,5 pt**

Partie D :

Calculer l'aire A de la partie du plan située entre (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équation

$x=0$ et $x=1$. **1pt**