Exercice de colle

$$\phi : x \mapsto x^n + x - 1$$

On veut montrer que si $\varepsilon > 0$, on a à partir d'un certain rang N :

$$\forall n > N, \phi\left(1 - \frac{(1+\varepsilon)\ln(n)}{n}\right) < 0$$

Ceci équivaut à :

$$\left(1 - \frac{(1+\varepsilon)\ln(n)}{n}\right)^n < \frac{(1+\varepsilon)\ln(n)}{n}$$

A partir de là, il est plus simple de passer au ln, et cette dernière inégalité équivaut à :

$$n\ln\left(1 - \frac{(1+\varepsilon)\ln(n)}{n}\right) < \ln(1+\varepsilon) + \ln(\ln(n)) - \ln(n)$$

$$n\left(-\frac{(1+\varepsilon)\ln(n)}{n} + O(\frac{\ln(n)^2}{n^2})\right) < \ln(1+\varepsilon) + \ln(\ln(n)) - \ln(n)$$

$$-\varepsilon\ln(n) + O(\frac{\ln(n)^2}{n}) < \ln(1+\varepsilon) + \ln(\ln(n))$$

Ouf, il est clair que cette dernière inégalité est vraie à partir d'un certain rang. De même l'inégalité inverse est évidente si $\varepsilon < 0$ et l'on peut remonter le fil du raisonnement, ceci nous donne un encadrement pour n assez grand de la solution x_n de $\phi(x_n) = 0$:

$$1 - \frac{(1+\varepsilon)\ln(n)}{n} < x_n < 1 - \frac{(1-\varepsilon)\ln(n)}{n}$$

Ceci signifie :

$$x_n = 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Pour le développement asymptotique à l'ordre suivant, je prétends que :

$$x_n = 1 - \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(\ln(n))}{n} + o\left(\frac{\ln(\ln(n))}{n}\right)$$

Le début de la méthode que je propose est identique : On veut montrer que si $\varepsilon > 0$, on a à partir d'un certain rang N :

$$\forall n > N, \phi\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + \frac{(1+\varepsilon)\ln(\ln(n))}{n}\right) > 0$$

Ceci équivaut à :

$$\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + \frac{(1+\varepsilon)\ln(\ln(n))}{n}\right)^n > \frac{\ln(n)}{n} - \frac{(1+\varepsilon)\ln(\ln(n))}{n}$$

A partir de là, il est plus simple de passer au ln, et cette dernière inégalité équivaut à :

$$n\ln\left(1-\frac{\ln(n)}{n}+\frac{(1+\varepsilon)\ln(\ln(n))}{n}\right)>\ln\left(\frac{\ln(n)}{n}-\frac{(1+\varepsilon)\ln(\ln(n))}{n}\right)$$

Il suffit de vérifier que :

$$n\left(-\frac{\ln(n)}{n}+\frac{(1+\varepsilon)\ln(\ln(n))}{n}+O(\frac{\ln(n)^2}{n^2})\right)>\ln\left(\frac{\ln(n)}{n}-\frac{(1+\varepsilon)\ln(\ln(n))}{n}\right)$$

$$-\ln(n)+(1+\varepsilon)\ln(\ln(n))+O(\frac{\ln(n)^2}{n})>\ln\left(\frac{\ln(n)}{n}\left(1-\frac{(1+\varepsilon)\ln(\ln(n))}{\ln(n)}\right)\right)$$

$$-\ln(n)+(1+\varepsilon)\ln(\ln(n))+O(\frac{\ln(n)^2}{n})>\ln(\ln(n))-\ln(n)+\ln\left(1-\frac{(1+\varepsilon)\ln(\ln(n))}{\ln(n)}\right)$$

$$\varepsilon\ln(\ln(n))+O(\frac{\ln(n)^2}{n})>\ln\left(1-\frac{(1+\varepsilon)\ln(\ln(n))}{\ln(n)}\right)$$

Et là, ça passe largement : on a un truc qui tend vers $+\infty$ à gauche et quelque chose qui tend vers 0 à droite. (toutes mes limites, $O()$ s'entendent quand $n\to\infty$). Dans cette partie, il faut être attentif au O qui est nécessaire pour pouvoir considérer le terme qui est de l'ordre de $\frac{\ln(\ln(n))}{n}$, alors qu'un $o()$ aurait suffi pour la première partie de cet exercice.
Si l'on reprend tout ça avec $\varepsilon<0$, c'est l'inégalité inverse que l'on obtient, et l'on a donc bien à partir d'un certain rang :

$$1-\frac{\ln(n)}{n}+\frac{(1-\varepsilon)\ln(\ln(n))}{n}<x_n<1-\frac{\ln(n)}{n}+\frac{(1+\varepsilon)\ln(\ln(n))}{n}$$

Pour le terme d'après, j'avais dû tout simplement m'inspirer de la dernière inégalité et chercher pour quel ε_n ça donnait une égalité :

$$\varepsilon_n\ln(\ln(n))\backsimeq\ln\left(1-\frac{(1+\varepsilon_n)\ln(\ln(n))}{\ln(n)}\right)$$

et comme ε_n tend vers 0 d'après le raisonnement précédent :

$$\varepsilon_n\ln(\ln(n))\backsimeq-\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$$

$$\varepsilon_n\backsimeq-\frac{1}{\ln(n)}$$

Donc j'ai dans l'idée que le terme suivant serait :

$$x_n=1-\frac{\ln(n)}{n}+\frac{(1+\varepsilon_n)\ln(\ln(n))}{n}+o\left(\varepsilon_n\frac{\ln(\ln(n))}{n}\right)$$

$$x_n=1-\frac{\ln(n)}{n}+\frac{\ln(\ln(n))}{n}-\frac{\ln(\ln(n))}{n\ln(n)}+o\left(\frac{\ln(\ln(n))}{n\ln(n)}\right)$$