Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé réel ou complexe.

La norme est induite par un produit scalaire (dans le cas réel), un produit hermitien (dans le cas complexe) si et seulement sion a la « relation du parallélogramme » :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \tag{1}$$

1 Analyse

En notant $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire (resp hermitien) on a

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle \\
&\quad + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,-y \rangle + \langle -y,x \rangle \\
&= 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)
\end{aligned}$$

Rappel On a les relations (formules de polarisation) :

$$\langle x,y \rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big) \quad \text{pour le produit scalaire}$$
$$\langle x,y \rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|ix+y\|^2 - i\|ix-y\|^2\Big) \quad \text{pour le produit hermitien}$$

2 Une application $\mathbb{R}-$bilinéaire symétrique

Soit E espace vectoriel normé réel ou complexe. On suppose la condition (1) vérifiée et on définit Φ par

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \Phi(x,y) = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big) \tag{2}$$

On a successivement :

2.1 Φ est symétrique

Evident.

2.2 $\forall (x,y) \in E^2,\ \Phi(-x,y) = -\Phi(x,y)$

Evident.

2.3 $\forall (x,y) \in E^2,\ \Phi(2x,y) = 2\Phi(x,y)$

La relation (1) nous donne :

$$\|x + \frac{y}{2} + \frac{y}{2}\|^2 + \|x + \frac{y}{2} - \frac{y}{2}\|^2 = 2\Big(\|x + \frac{y}{2}\|^2 + \|\frac{y}{2}\|^2\Big)$$
$$\|x - \frac{y}{2} + \frac{y}{2}\|^2 + \|x - \frac{y}{2} - \frac{y}{2}\|^2 = 2\Big(\|x - \frac{y}{2}\|^2 + \|\frac{y}{2}\|^2\Big) \quad \text{soit}$$
$$4\Phi(x,y) = 2\Phi(2x,y) \quad \text{par soustraction des deux précédentes}$$

2.4 $\forall (x,y,z) \in E^3,\ \Phi(x+y,z) = \Phi(x,z) + \Phi(y,z)$

On a

$$
\begin{aligned}
4\Phi(2x+2y,z) &= \|x+y+\frac{z}{2}\|^2 - \|x+y-\frac{z}{2}\|^2 \\
\|x+y+\frac{z}{2}\|^2 + \|x+\frac{z}{2}-y\|^2 &= 2\Big(\|x+\frac{z}{2}\| + \|y\|^2\Big) \\
\|x+y-\frac{z}{2}\|^2 + \|x-\frac{z}{2}-y\|^2 &= 2\Big(\|x-\frac{z}{2}\| + \|y\|^2\Big) \quad \text{relation (1)}
\end{aligned}
$$

D'où par différence :

$$
\begin{aligned}
\Phi(2x+2y,z) + \Phi(2x-2y,z) &= 2\Phi(2x,z) \quad \text{et par permutation de } x,y \\
\Phi(2x+2y,z) + \Phi(2y-2x,z) &= 2\Phi(2y,z) \quad \text{donc :} \\
2\Phi(2x+2y,z) &= 2\Big(\Phi(2x,z) + \Phi(2y,z)\Big) \\
&= 4\Big(\Phi(x,z) + \Phi(y,z)\Big) \quad \text{relation (2.3)}
\end{aligned}
$$

2.5 $\forall y \in E,\ x \mapsto \Phi(x,y)$ est $\mathbb{R}-$linéaire

Pour $(x,y) \in E^2$, soit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \Phi(tx,y)$.
On a f continue sur $\mathbb{R}$ et, d'après (2.4), $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
On en déduit $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = tf(1)$ soit
$\forall (t,x,y) \in \mathbb{R} \times E \times E,\ \Phi(tx,y) = t\Phi(x,y)$.

3 Une application sesquilinéaire à symétrie hermitienne

On suppose maintenant que E est espace vectoriel normé complexe avec une norme vérifiant (1).
On définit encore Φ par la relation (2) et on note :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ S(x,y) = \Phi(x,y) + i\Phi(ix,y) \tag{3}$$

A noter, puisque Φ est à valeurs réelles que
$\Re(S(x,y)) = \Phi(x,y)$ et $\Im(S(x,y)) = \Phi(ix,y)$. Dans ces conditions :

3.1 $S(y,x) = \overline{S(x,y)}$

Par symétrie de Φ on a $\Re(S(y,x)) = \Phi(y,x) = \Phi(x,y) = \Re(S(x,y))$.
Toujours par symétrie de Φ on a

$$
\begin{aligned}
4\Im(S(y,x)) &= 4\Phi(iy,x) \\
&= \|iy+x\|^2 - \|iy-x\|^2 = \|y-ix\|^2 - \|y+ix\|^2 \\
&= -\Big(\|y+ix\|^2 - \|ix-y\|^2\Big) \\
&= -4\Im(S(x,y))
\end{aligned}
$$

3.2 $S(.,y)$ est semi-linéaire

On a $S(ix,y) = \Phi(ix,y) + i\Phi(-x,y) = -i\Big(\Phi(x,y) + i\Phi(ix,y)\Big) = -iS(x,y)$ d'où, par $\mathbb{R}-$linéarité de Φ, pour $\alpha = \Re(\lambda)$, $\beta = \Im(\lambda)$,

$$\begin{aligned} S(\lambda x,y) &= \Phi(\alpha x + i\beta x, y) + i\Phi(i\alpha x - \beta x, y) \\ &= \alpha\Phi(x,y) - i\beta\Phi(x,y) + i\alpha\Phi(ix,y) + \beta\Phi(ix,y) \\ &= \overline{\lambda}\Phi(x,y) + \overline{\lambda}i\Phi(x,y) = \overline{\lambda}S(x,y) \end{aligned}$$

4 Conclusion

4.1 Cas des espaces réels

Φ est une forme bilinéaire symétrique et, puisque $\Phi(x,x) = \|x\|^2$, la forme est définie positive.

Il en résulte que Φ est un produit scalaire de E et $\|x\| = \sqrt{\Phi(x,x)}$.

4.2 Cas des espaces complexes

S est une forme sesquilinéaire hermitienne et, toujours avec $S(x,x) = \|x\|^2$, c'est une forme définie positive.

La norme de E est bien hermitienne et $\|x\| = \sqrt{S(x,x)}$.