Solution du défi mathématique

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}=\frac{1}{x^2+y^2+2x+2}+\frac{1}{y^2+z^2+2y+2}+\frac{1}{x^2+z^2+2z+2}$$

On a par AM-GM : $\begin{cases} x^2+y^2\geq 2xy \\ y^2+z^2\geq 2yz \\ x^2+z^2\geq 2xz \end{cases}$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+y^2+2x+2}+\frac{1}{y^2+z^2+2y+2}+\frac{1}{x^2+z^2+2z+2} &\leq \frac{1}{2xy+2x+2}+\frac{1}{2yz+2y+2}+\frac{1}{2xz+2z+2} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{xz+z+1}\right) \quad (*)\end{aligned}$$

Notons alors : $S=\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{xz+z+1}$

On a : $S=\frac{z}{z(xy+x+1)}+\frac{x}{x(yz+y+1)}+\frac{y}{y(xz+z+1)}=\frac{z}{zx+z+1}+\frac{x}{xy+x+1}+\frac{y}{yz+y+1}$

Et : $S=\frac{zy}{y(zx+z+1)}+\frac{xz}{z(xy+x+1)}+\frac{yx}{x(yz+y+1)}=\frac{zy}{yz+y+1}+\frac{xz}{xz+z+1}+\frac{yx}{xy+x+1}$

Finalement : $3S=\frac{1+x+yx}{xy+x+1}+\frac{1+y+zy}{yz+y+1}+\frac{1+z+xz}{xz+z+1}=3$ donc $S=1$

D'après l'inégalité (*) on en déduit alors que : $\frac{1}{x^2+y^2+2x+2}+\frac{1}{y^2+z^2+2y+2}+\frac{1}{x^2+z^2+2z+2}\leq\frac{1}{2}$

Et par suite l'inégalité demandée : $\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\leq\frac{1}{2}$