Oraux Ulm 2019 planche 2.1

Énoncé

Soit $n \geqslant 2$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ des nombres réels distincts 2 à 2. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. pour tout $1 \leqslant i \leqslant n+1$, $\det(A + t_i B) = 0$
2. il existe V, W deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $A(V) \subset W$, $B(V) \subset W$ et $\dim W < \dim V$

Solution

- Supposons que (2) est vraie.
  Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(A + tB)(V) \subset W$. Si $A + tB$ était inversible, la restriction de $A+tB$ à V serait inversible et $\dim((A+tB)(V)) = \dim V$. On aurait donc $\dim V \leqslant \dim W$, ce qui est contradictoire. Donc $A + tB$ n'est pas inversible et $\det(A + tB) = 0$. (1) est donc vraie.
- Supposons que (1) est vraie.

  Alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n+1$, il existe $x_i \neq 0$ tel que $(A + t_i B)(x_i) = 0$ (puisque $\det(A + t_i B) = 0$). x_1 est libre et $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ est liée. On en déduit qu'il existe k tel que $(x_1, \ldots, x_k)$ est libre et $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ est liée. Notons V le sous-espace vectoriel engendré par $(x_1, \ldots, x_k)$ et W le sous-espace vectoriel engendré par $(Bx_1, \ldots, Bx_k)$.

  Il est clair que $B(V) = W$. De plus, pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, on a $Ax_i = -t_i Bx_i$ qui appartient à W. Donc $A(V) \subset W$.

  Supposons par l'absurde que $(Bx_1, \ldots, Bx_k)$ est libre. On aurait alors pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$: $(A+t_{k+1}B)(x_i) = (t_{k+1} - t_i)Bx_i$. Nous en déduirions que $A+t_{k+1}B$ est bijective de V sur W. Cependant, nous savons que $(x_1, \ldots, x_k)$ est libre et $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ est liée. Nous en déduisons que x_{k+1} appartient à $V = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_k)$. Nous disposons donc d'un vecteur non x_{k+1} de V tel que $(A + t_{k+1}B)x_{k+1} = 0$. Tout ceci est contradictoire.

  Donc, $(Bx_1, \ldots, Bx_k)$ est liée et W, qui est le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs, est de dimension strictement inférieure à $k = \dim V$.

  Nous venons de démontrer que (1) est vraie.