Oraux Ulm 2019 planche 3.2

Énoncé

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(1) = 1$ et $f(x)f(y) \leq f(xy)$ pour tous $x, y > 0$.

Solution

Soit f une fonction solution.

- Pour tout x positif, $0 \leqslant (f(\sqrt{x}))^2 \leqslant f(x)$
- On en déduit par récurrence sur n que : $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $f(x_1) \ldots f(x_n) \leqslant f(x_1) \ldots f(x_n)$
- Soit x un réel strictement positif.
  On a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f(x^{1/n})^n \leq f(x)$
  Par dérivabilité de f en 1 : $f(x^{1/n}) = f(1) + \frac{1}{n}\ln(x)f'(1) + o\left(\frac{1}{n}\right)$
  On en déduit que : $x^{f'(1)} \leq f(x)$
- Supposons qu'il existe x strictement positif tel que $x^{f'(1)} < f(x)$
  On aurait alors $1 = x^{f'(1)}\left(\frac{1}{x}\right)^{f'(1)} < f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) \leq f(1) = 1$
  C'est contradictoire.
- Donc, pour tout réel strictement positif x , $f(x) = x^{f'(1)}$
  La dérivabilité de f en 0 impose que $f'(1) \geq 1$ ou $f'(1) = 0$

Conclusion :

Les fonctions f vérifiant les conditions de l'énoncé sont les fonctions $f(x) = x^{\alpha}$ avec $\alpha \geq 1$ ou $\alpha = 0$.