21:12 100%
Travail en autonomie...

Travail en autonomie n° 3 :
Applique design.

Un designer a imaginé une nouvelle applique murale extérieure, reproduite ci-dessous. Pour modéliser le profil du support entre le mur et la lampe, que l'on potence, en forme de col de cygne, il envisage de raccorder la courbe représentative d'une fonction polynôme du 3ème degré à un arc de cercle.

Les trois premières parties de cet exercice peuvent être traitées séparément.

Partie A.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

1°) Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de f.

2°) On souhaite que la courbe représentative de cette fonction passe par le point O(0 ; 0) et que la tangente en O ait pour coefficient directeur − 0,6.
Déterminer les valeurs de coefficients d et c qui permettent que ces deux contraintes soient respectées.

3°) On souhaite que la courbe représentative de cette fonction passe par le point A (6 ; 3,6) et que la tangente en A soit horizontale.
En déduire un système d'équations dont les coefficients a et b sont solutions.

4°) a) Montrer que ce système d'équations est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} 72a + 12b = 2{,}4 \\ 108a + 12b = 0{,}6 \end{cases}$$

b) Résoudre ce système.

5°) Donner l'expression de la fonction f dont la courbe représentative répond aux conditions imposées.

Partie B.

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -0{,}05x^3 + 0{,}5x^2 - 0{,}6x$$

1°) Déterminer l'expression de la fonction dérivée f'.

2°) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 6].

3°) Calculer l'ordonnée du point E d'abscisse 4 appartenant à la courbe représentative de la fonction f.

4°) Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point E.

5°) Résoudre l'équation f(x) = 0 (on pourra penser à factoriser par x) et en déduire les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction f sur [0 ; 6] et de l'axe des abscisses.

Partie C.

On admet que le point E a pour coordonnées (4 ; 2,4).
On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre D (6,4 ; 0) et passant par le point E.

1°) a) Montrer que le rayon de ce cercle est $r = \sqrt{11{,}52}$.

b) En déduire une équation cartésienne de ce cercle $\mathcal{C}$.

c) Le point A appartient-il au cercle $\mathcal{C}$?

d) Déterminer les abscisses des points du cercle $\mathcal{C}$ d'ordonnée 1. (valeurs exactes attendues)

2°) On note F celui de ces points qui a la plus grande abscisse et on considère le point B de coordonnées (6 ; 4,4).

a) Démontrer que la droite (BF) est tangente au cercle $\mathcal{C}$.