

Et puis on joue pour s'entraîner et comprendre par soi-même

<http://championmath.free.fr/tourhanoi.htm>

Exercice à traiter

Nous allons nous intéresser à un problème mathématique célèbre appelé Tours de Hanoi.

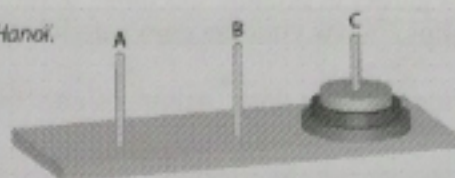
Chercher en autonomie

On dispose de trois piquets A, B et C et de n disques percés empilés par ordre croissant de taille sur le piquet C. Le but est de déplacer ces n disques du piquet C sur le piquet A, en respectant les règles suivantes :

- On ne déplace qu'un seul disque à la fois et le disque déplacé doit aller sur l'un des deux autres piquets ; on appelle cela un déplacement.
- On ne peut jamais déplacer un disque sur un disque plus petit.

Pour tout entier naturel n non nul, on note h_n le nombre minimal de déplacements nécessaires pour transporter une tour de n disques du piquet C vers le piquet A.

1. Déterminer h_1 , h_2 et h_3 .



PISTE

a. Pour h_3 , modéliser par un tableau la position de chaque disque après chaque étape

1. Déterminer h_1 , h_2 , et h_3 .

Méthode libre : on raconte à l'écrit, on s'enregistre, on se filme, on dessine ...on suit le conseil là

2. a. Pour pouvoir déplacer le plus gros disque d'une tour de taille $n + 1$ en A, il faut d'abord reconstituer la tour des n plus petits disques en B.

Justifier alors que $h_{n+1} = 2 \times h_n + 1$.

b. Conjecturer l'expression de h_n en fonction de n pour tout entier naturel n non nul.

2.a. **Méthode libre :** on raconte à l'écrit, on s'enregistre, on se filme, on dessine

2.b. Pour cela, je vous demande de trouver les 6 premiers termes de la suite en utilisant la calculatrice ... il y a plusieurs façons, n'oubliez pas la morale précédente.

2. c. Démonstration de la conjecture :

→ Résoudre l'équation $x = 2x + 1$

→ On pose une nouvelle suite définie par $u_n = h_n + 0,5$ et vous allez démontrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 2.

indications :

Ecrire u_{n+1} en fonction de h_{n+1}

Remplacer h_{n+1} par ...

Puis expliquer pourquoi $h_n = u_n - 0,5$ et le remplacer dans le calcul de u_{n+1}

Vous devez obtenir :

$$\text{pour tout entier } n, \quad u_{n+1} = 2u_n$$

→ Que peut-on en déduire ?

→ Préciser la valeur du 1^{er} terme : u_1

→ En déduire l'expression explicite de u_n puis celle de h_n .

d. En utilisant l'expression explicite de h_n déterminer le nombre minimal de déplacements nécessaires pour déplacer une tour de 8 disques.

vérification : <https://www.youtube.com/watch?v=dLvBAsBNjmM>