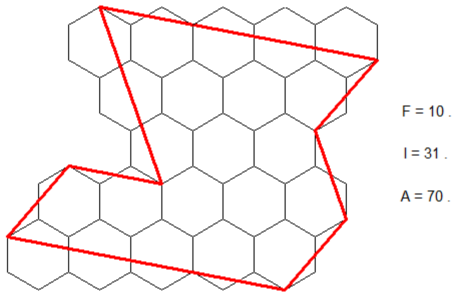
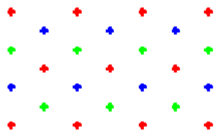
On a dessiné un polygone simple P dont tous les angles sont des multiples de 60° en plaçant les sommets aux noeuds d'un réseau en hexagones réguliers d'aire 1 . P est parfait s'il vérifie la formule $4A = F + 2I - 2$ où A , F et I désignent l'aire du polygone et le nombre de points du réseau sur la frontière ou à l'intérieur de P . A quelle condition P est-il parfait ?

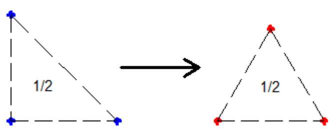


On commence par colorier les nœuds du réseau alternativemt en bleu et vert puis on ajoute des points rouges aux centres des hexagones .



Toute rotation de centre l'un des nœuds et d'angle 60° laisse invariante la couleur de ce nœud et échange les deux autres couleurs . Tout triangle équilatéral T construit sur ce réseau est monochrome ou tricolore et son centre est un point du réseau si et seulement s'il est monochrome . Supposons maintenant que T est irréductible , c'est à dire que sa frontière ne rencontre le réseau qu'en ses sommets . Si T est monochrome , la couleur de son centre n'est pas celle de ses sommets et les autres points à l'intérieur de T sont équitablement coloriés . Sinon les trois couleurs sont également représentées à l'intérieur de T .

La formule de Pick nous dit que l'aire d'un polygone construit sur les nœuds d'un réseau carré de maille 1 , vérifie la relation : $2A = F + 2I - 2$. La formule est conservée par toute fonction affine respectant les aires .



Choisissons la maille triangulaire comme unité d'aire , la formule de Pick appliquée à ce réseau nous donne $A = F + 2I - 2$.
Revenons au polygone simple P , il se décompose de façon unique en triangles irréductibles , ces triangles sont tous semblables et de même nature (monochromes ou tricolores) . Etudions séparément ces deux cas .

1. Les triangles sont monochromes :

   A l'intérieur de chaque triangle il y a $3k + 1$ points du réseau triangulaire , k de la couleur des sommets et k ou $k + 1$ des deux autres couleurs selon l'orientation des triangles . Notons n_1 le nombre de triangles à majorité rouge et n_2 les autres : $n = n_1 + n_2$. L'aire du triangle est $a = 6k + 3$ et l'aire de P , $A = 3n(2k + 1)$. On peut ranger les points du réseau à la frontière ou à l'intérieur de P en deux catégories : ceux qui sont à la frontière des triangles irréductibles et ceux qui sont à l'intérieur . Sur le réseau hexagonal $F + 2I$ vaut n pour la première catégorie et $4kn + 2n_2$ pour la deuxième soit en tout $4kn + 2n_2 + n$. Avec le changement d'unité $2A = 3(F - 2I - 2)$ quand $n_1 = n_2$.

2. Les triangles sont tricolores :

   Comme les sommets du polygone ne sont pas rouges , les triangles s'assembent par trois pour former n trapèzes dont les sommets alternent les couleurs bleues et vertes . A l'intérieur de chaque triangle il y a $3k$ points du réseau triangulaire donc l'aire du polygone est égale à $A = 3n(3k + 1)$. Comme pour le cas monocolore $F + 2I$ est égal à $2n + 2$ pour les sommets du réseau hexagonal appartenant à la frontière des trapèzes et à $6kn$ pour les autres , soit en tout $6kn + 2n + 2$. On a toujours $2A = 3(F + 2I - 2)$.

Pour résumer , les polygones qui conviennent sont ceux qui sont décomposables en triangles irréductibles tricolores ou en un nombre égal de triangles irréductibles monocolores dans chacune des deux orientations .