Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Objectif du problème

Soit a un nombre réel. On se propose d'étudier les suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = (a+3)u_{n+2} - (3a+2)u_{n+1} + 2au_n. \tag{1}$$

On note E_a l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (1).

Pour toute suite $u \in E_a$ et tout entier naturel n, on note $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

Partie A : une première approche

I. Un élève propose d'utiliser un tableur pour calculer les premières valeurs d'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_a$, une fois les valeurs de a, u_0, u_1 et u_2 fixées. Il prépare la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D
1	n	u_n	a	1
2	0	2		
3	1	2		
4	2	3		
5	3			
6	4			

La valeur choisie pour le paramètre a est stockée dans la cellule D1.
Quelle formule l'élève peut-il saisir dans la cellule B5 pour obtenir les valeurs de la suite en utilisant la poignée de recopie vers le bas ?

II. Démontrer que, pour tout nombre réel a, les suites constantes appartiennent à E_a.

Partie B : le cas $a = 0$

Dans cette partie, on étudie le cas où $a = 0$. On cherche l'ensemble E_0 des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+2} - 2u_{n+1}. \tag{2}$$

III. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E_0.
On considère la suite $e = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$e_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ e_n = 0.$$

1. Vérifier que $e \in E_0$.

2. Soit λ un nombre réel. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - \lambda e_n$. Démontrer qu'il existe un réel λ tel que $v_2 = 3v_1 - 2v_0$ et démontrer que pour cette valeur de λ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n. \tag{3}$$

3. Démontrer qu'il existe deux nombres réels α et β tels que

$$v_0 = \alpha + \beta, \qquad\qquad v_1 = \alpha + 2\beta.$$

4. Démontrer que pour tout entier naturel n, $v_n = \alpha + \beta 2^n$.

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire des suites $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, où $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite constante de valeur 1.

IV. Réciproquement, démontrer que toute suite de la forme mentionnée à la question **III. 5.** appartient à E_0.

V. **1.** Déterminer l'ensemble E_0.

2. Comment s'appelle le raisonnement mobilisé dans les questions **III.** et **IV.** qui a permis de déterminer l'ensemble E_0 ?

Partie C : le cas $a = 3$

On étudie à présent le cas où $a = 3$. On cherche l'ensemble E_3 des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n. \tag{4}$$

Pour cela, on va utiliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

VI. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E_3.

1. Pour tout entier naturel n, trouver une relation entre U_{n+1}, A et U_n.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

3. On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que P est inversible puis que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D, que l'on déterminera.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. En déduire qu'il existe trois nombres réels x, y, z tels que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = x + y \times 2^n + z \times 3^n.$$

6. Démontrer que x, y, z s'expriment chacun linéairement en fonction de u_0, u_1, u_2.

VII. Démontrer que toute combinaison linéaire des suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E_3.

VIII. Déterminer l'ensemble E_3.

IX. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de E_3 telle que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer u_n pour tout entier naturel n.

X. Déterminer la limite de cette suite en $+\infty$.

XI. Écrire un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^5$.

XII. Un élève utilise cet algorithme sur la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E_3 telle que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il s'étonne de recevoir un message d'erreur. Comment le professeur peut-il expliquer ce message ?

Partie D : le cas général

Cette partie a pour objectif d'interpréter avec un recul de niveau première année de master les résultats des parties précédentes.

Soit a un nombre réel. On considère l'application θ définie par :

$$\theta : \left\{ \begin{array}{lcl} E_a & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & U_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

XIII.
1. Rappeler sans démonstration quelle est la structure algébrique de l'ensemble des suites réelles.
2. Démontrer que E_a est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

XIV.
1. Démontrer que θ est une application linéaire.
2. Démontrer que θ est une application bijective.
3. En déduire la dimension de l'espace-vectoriel E_a.

XV. En prenant appui sur les parties précédentes, déterminer une base de E_0 et une base de E_3.

Problème n° 2

Notations
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

La *radioactivité*, terme inventé vers 1898 par Pierre Curie, est un phénomène physique au cours duquel des noyaux atomiques instables se désintègrent spontanément avec dégagement d'énergie sous forme de divers rayonnements. Un noyau instable est dit *radioactif*.

Partie A : étude de la radioactivité d'un noyau atomique

Soit λ un nombre réel strictement positif. On rappelle qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ si elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et a pour densité la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Étant donné un noyau radioactif, on modélise sa durée de radioactivité, c'est-à-dire le temps (exprimé en jours) nécessaire à sa désintégration, par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle dont le paramètre réel strictement positif λ est appelé *caractéristique de radioactivité* du noyau considéré.

I. Démontrer que pour tout nombre réel positif t,

$$\mathrm{P}(X \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

et en déduire $\mathrm{P}(X > t)$.

II. Interpréter chacune de ces probabilités en termes de durée de radioactivité.

III. Démontrer que, pour tous nombres réels positifs t et h,

$$\mathrm{P}_{(X>t)}(X > t + h) = \mathrm{P}(X > h).$$

IV. Pour $h \in \mathbb{R}^+$, interpréter $\mathrm{P}_{(X>t)}(X > t + h)$.

V. Expliquer pourquoi on peut affirmer que la désintégration radioactive est un phénomène sans mémoire.

VI. Justifier l'existence de l'espérance de la variable aléatoire X et déterminer sa valeur. Interpréter ce résultat en termes de durée de radioactivité.

VII. Justifier l'existence de la variance de la variable aléatoire X. Déterminer l'écart-type de la variable aléatoire X.

Partie B : étude de l'évolution d'un échantillon de noyaux radioactifs

VIII. Soit N_0 un entier naturel non nul. On dispose au départ d'un échantillon de N_0 noyaux radioactifs dont la caractéristique de radioactivité est un nombre réel strictement positif λ. On se propose d'étudier l'évolution au cours du temps du nombre de noyaux radioactifs (c'est-à-dire n'étant pas encore désintégrés) présents dans l'échantillon. On note $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs présents dans l'échantillon à l'instant t, exprimé en jours à compter du départ.

1. Lorsque l'on dispose d'un échantillon contenant un grand nombre de noyaux, on estime habituellement la probabilité qu'un noyau de l'échantillon soit encore radioactif à l'instant t par la proportion de noyaux radioactifs présents dans l'échantillon à l'instant t. Donner une justification mathématique de cette démarche.

2. Utiliser les résultats de la **partie A** pour établir que, selon cette estimation, $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$ pour tout réel positif t.

3. Quelle réponse pourrait-on apporter à un élève faisant remarquer que le nombre $N(t)$ ainsi obtenu n'est pas toujours un entier naturel ?

IX. On appelle *demi-vie* d'un noyau de l'échantillon, notée τ, la durée, exprimée en jours, au bout de laquelle la moitié des noyaux de l'échantillon se sont désintégrés.

1. Exprimer la demi-vie d'un noyau radioactif en fonction de sa caractéristique de radioactivité λ.

2. L'iode 131 a une demi-vie de 8 jours. Quelle est sa caractéristique de radioactivité ?

3. Pour un noyau d'iode 131, calculer la probabilité que le temps nécessaire à sa désintégration soit compris entre 6 et 10 jours.

X. **1.** Comment justifier dans le cadre des programmes du lycée que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$?

2. Justifier par un argument mathématique la proposition suivante, à la base de la loi de désintégration radioactive : « la probabilité, pour un noyau de caractéristique de radioactivité λ, radioactif à l'instant t, d'être désintégré à l'instant $t + \Delta t$ (avec Δt petit) est approximativement égale à $\lambda \Delta t$ ».

XI. **1.** Démontrer que, si une variable aléatoire U suit la loi uniforme sur $[0, 1[$, alors la variable aléatoire $X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ. *On pourra calculer* $\mathrm{P}(X \leqslant t)$.

2. Dans le langage Python, la fonction `random.random()` renvoie un nombre de l'intervalle $[0, 1[$ distribué selon la loi uniforme et l'instruction `math.log(x)` renvoie le logarithme népérien du nombre strictement positif `x`.
Écrire une fonction `expo(Lambda)` prenant en argument un réel `Lambda` et qui renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre `Lambda`.

3. On considère la fonction `mystere(Lambda,t)` prenant en argument un réel `Lambda` et un réel positif `t`, définie de la manière suivante :

```
def mystere(Lambda,t):
    N0 = 1000
    N = 0
    for k in range(N0):
        X = expo(Lambda)
        if X > t:
            N = N + 1
    return N/N0
```

a. Interpréter le résultat renvoyé par `mystere(Lambda,t)`.

b. Écrire, à l'aide de la fonction `mystere`, une commande permettant d'obtenir une valeur approchée du résultat de la question **IX.3**.