Une équation fonctionnelle

On cherche les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$(*) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f \circ f(x) = 6x - f(x)$$

Premiers résultats

— Il existe des solutions, par exemple $x \mapsto 2x$.

— Toutes les solutions sont injectives.
Si $f(a) = f(b) = y$ alors $f(y) = f \circ f(a) = 6a - y$ et $f(y) = f \circ f(b) = 6b - y$ d'où $a = b$.

— Si la fonction admet un point fixe, c'est zéro.
En effet si $f(x) = x$ alors $f \circ f(x) = f(x) = x$ et en utilisant la relation $(*)$ il vient $x = 6x - f(x) = 6x - x$ d'où $x = 0$.

Itérations

Il est clair que la connaissance de a et de $f(a)$ permet de calculer $f \circ f(a)$ en utilisant $(*)$.
On pose $a_0 = a$, $a_1 = f(a)$ et de façon générale $a_{n+1} = f(a_n)$.
En utilisant $(*)$ on a $a_{n+2} = f \circ f(a_n) = 6a_n - a_{n+1}$.
On reconnaît une suite récurrente d'ordre deux et un calcul simple montre que

$$a_n = \lambda(-3)^n + \mu\, 2^n \text{ avec } \lambda = \frac{2a_0 - a_1}{5}\ ; \mu = \frac{3a_0 + a_1}{5}$$

Remarque : On peut prolonger la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en une suite pour les valeurs négatives de n tant que a_{n+1} admet un antécédent qui est unique car f est injective.

La suite des $f^{-n}(a)$ peut aussi être infinie. On a alors une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui vérifie toujours $a_{n+1} = f(a_n)$.
Dans le cas où f est surjective, et donc bijective, toutes les suites sont de ce type.

Une première description

On utilise l'axiome du choix et on muni $\mathbb{R}$ d'un bon ordre.
On prend la première valeur a et on lui choisi une image parmi les valeurs possibles [1].
On supprime toutes les valeurs de la suite obtenue et on recommence avec la première valeur disponible.
Sauf erreur de ma part on obtient ainsi une fonction répondant à la condition $(*)$.
Il presque évident qu'on les obtient toutes.
Mais je suis mal à l'aise avec ce genre de choses.

Étude du signe

On étudie quatre cas :

1. $f(\mathbb{R}^{*+}) \subset \mathbb{R}^{*+}$

2. $f(\mathbb{R}^{*-}) \subset \mathbb{R}^{*-}$

---

1. La suite (a_n) ne doit pas comporter de répétition de valeurs.
Par exemple il est impossible de choisir $f(1) = 5$ car on aurait $f \circ f(1) = 1$ puis $f^3(1) = 5$ or la relation $(*)$ donne $f(1) = 29$. Mais $\Big(3 \cdot 2^k\big(2^{n-1} - 1\big) + 2 \cdot (-3)^k\big((-3)^{n-1} - 1\big)\Big)$ l'ensemble des valeurs interdites est au plus dénombrable.
Voir annexe

3. $f(\mathbb{R}^{*+}) \subset \mathbb{R}^{*-}$

4. $f(\mathbb{R}^{*-}) \subset \mathbb{R}^{*+}$

Dans le cas **1** avec $f^n(a) = \lambda(-3)^n + \mu\, 2^n$ on a évidement des valeurs négatives pour $f^n(a)$ si $\lambda \neq 0$.
On en déduit $\lambda = 0$ soit $2a - f(a) = 0$ d'où $\forall a > 0\ f(a) = 2a$.
Le cas **2** se traite de la même façon et on arrive à $\forall a < 0\ f(a) = 2a$.

Les cas **3** et **4** sont un peu plus délicats.
Pour les traiter je vais supposer f bijective. [2]

Pour le cas **3**
Soit f une solution bijective vérifiant $x > 0 \Rightarrow f(x) < 0$.
Quelque soit a dans $\mathbb{R}^{*+}$ on considère la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définie par $a_0 = a$ et $a_{k+1} = f(a_k)$ ou, ce qui revient au même car f est bijective $a_k = f^{-1}(a_{k+1})$.
Par hypothèse si $a_k > 0$ alors $a_{k+1} < 0$.
On a donc $a_{k+2} = 6a_k + (-a_{k+1}) > 0$ comme somme de deux nombres strictement positifs. Il en découle que $a_{k+3} < 0$ et par une récurrence immédiate que $a_k = (-1)^k|a_k|$, autrement dit les signes de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont alternés.
En utilisant le fait que $a_k = \lambda(-3)^k + \mu\, 2^k$ on voit que si $\mu \neq 0$ la suite a un signe constant (celui de μ) quand k tend vers $-\infty$.
On a donc $\mu = 0$ et donc $3a_0 + a_1 = 0$ d'où $f(a) = -3a$ quelque soit $a > 0$.

On fait la même chose pour le cas **4**.

On suppose f continue et bijective

A La courbe représentative de f ne peut pas couper la droite $y = x$ ailleurs qu'en zéro.

B Toutes les suites $f^{-n}(a)$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc $f(0) = 0$ par continuité.

Soit x un nombre strictement positif, on a deux cas possibles :

1. $x > f(x)$

2. $x < f(x)$

cas 1.
D'après **A** on a $\forall x > 0\ f(x) > x > 0$ et donc, d'après l'étude du signe
$\forall x > 0 \quad f(x) = 2x$.
Comme f est injective on ne peut pas avoir $x < 0$ et $f(x) > 0$.
On a donc $f(\mathbb{R}^{*-}) \subset \mathbb{R}^{*-}$ et
$\forall x < 0 \quad f(x) = 2x$.
Comme $f(0) = 0$ d'après **B** on a
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2x$.

cas 2.
Il est impossible dans ce cas que $\forall x > 0\ f(x) > 0$. En effet on aurait alors
$\forall x > 0\ f(x) = 2x > x$.
Donc $\exists x > 0\ f(x) < 0$.
Et par continuité $\forall x > 0\ f(x) < 0$.
D'après l'étude de signe on a alors
$\forall x > 0\ f(x) = -3x$.

2. Je n'ai pas trouvé de démonstration sans cette supposition, en fait je me demande si il existe des fonctions de ce type qui ne soient pas bijectives.

Comme f est injective on a alors $\forall x < 0\ f(x) > 0$.
D'où $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = -3x$.

Et la **conclusion :**
Si f est une solution de $(*)$ continue et bijective alors f est la fonction $x \mapsto 2x$ ou la fonction $x \mapsto -3x$.

Annexe : valeurs possibles pour $f(a)$

Sauf si f est la fonction nulle, une fonction vérifiant $(*)$ ne peut pas comporter de cycle du genre :

$$a_k \mapsto f(a_k) \mapsto \cdots a_k$$

En effet on a $f^n(a) = \lambda(-3)^n + \mu\, 2^n$ qui n'est évidemment pas périodique si $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$.
Mais on peut avoir une suite de ce type telle que $a_{k+n} = a_k$ pour un couple $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
Dans ce cas la suite $(a_k)_{k\in_N}$ ne peut pas représenter la suite des itérés $\left(f^f(a)\right)_{k\in_N}$ pour une fonction f.
Par exemple en prenant $a_0 = 9$ et $a_1 = 13$ on a
$a_2 = 41$; $a_3 = 37$; $a_4 = 209$; $a_5 = 13$; $a_6 = 1241\ldots$ et la valeur $f(13)$ n'est pas définie.

On cherche à quelles conditions sur a_0 et a_1 il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que : $a_{k+n} = a_k$.
On a vu que quelque soit l'entier i on a $a_i = \frac{1}{5}(2a_0 - a_1).(-3)^i + \frac{1}{5}(3a_0 + a_1).2^i$.
L'égalité demandée s'écrit donc

$$(2a_0 - a_1).(-3)^{k+n} + (3a_0 + a_1).2^{k+n} = (2a_0 - a_1).(-3)^k + (3a_0 + a_1).2^k$$

soit

$$a_0\Big(3 \cdot 2^k\big(2^n - 1\big) + 2 \cdot (-3)^k\big((-3)^n - 1\big)\Big) = -a_1\Big(2^k\big(2^n - 1\big) + (-3)^k\big((-3)^n - 1\big)\Big)$$

Il est facile de voir que les coefficients de a_0 et a_1 dans la dernière égalité ne sont jamais nuls car n est un entier strictement positif.
On a donc deux cas possibles pour l'égalité :

— soit a_0 ou a_1 est nul alors $f(0) = 0$ et tous les termes de la suite sont nuls ;

— soit a_0 et a_1 sont non nuls et

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{-\Big(2^k\big(2^n - 1\big) + (-3)^k\big((-3)^n - 1\big)\Big)}{\Big(3 \cdot 2^k\big(2^n - 1\big) + 2 \cdot (-3)^k\big((-3)^n - 1\big)\Big)}$$

On a ainsi la liste des valeurs interdites pour $f(a)$ en fonction de a.