Terminale Spé Maths - Pour le 09/11/2021 - Devoir Maison 3

CONSIGNE **:** Le premier exercice est obligatoire (si vous rendez le DM), le suivant est facultatif (donc à faire en plus si vous rendez le DM).

Exercice 1 (Révisions sur l'étude de fonctions)

Partie A

On considère la fonction g dont on donne le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
g	2	↘	$\frac{4}{3}$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

On donne aussi $g(3) = 4$ et $g'(3) = 8$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. $\mathcal{C}_g$ admet-elle des asymptotes ? Si oui, préciser leurs équations.
3. Donner les coordonnées du point A où la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ est horizontale.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 3.

Partie B

Soit f la fonction définir sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x - 1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f.

1. (a) Montrer que pour tout nombre réel $x \in D_f$, $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{2}{x-1}$.

   (b) Soit d la droite d'équation $y = 2x - 1$. Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de d.
2. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in D_f$ et étudier le signe de f'.

   (b) Construire le tableau de variations de f.
3. (a) Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = -1$.

   (b) $\mathcal{C}_f$ admet-elle une autre tangente parallèle à la droite T ?

Exercice 2 (Suites « imbriquées ») On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 16 \quad ; \quad v_0 = 5 \, ;$$

et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \\ \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et v_1.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.
   (a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $0,1$.
   En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de w_n en fonction de n.
   (b) Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -0,4w_n$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
   On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant v_0$ et donc que $v_n \geqslant 5$.
   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 5$.
   En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n).

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n).

4. (a) Démontrer que $\ell = \ell'$.
   (b) On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.
   Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $c_{n+1} = c_n$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n , $c_n = 100$.
   (c) Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ'.