La technique de la division.

Les nombres décimaux permettent d'approcher les nombres rationnels d'aussi près que l'on veut. Pour trouver les nombres décimaux proches d'un rationnel donné, on se sert d'une technique que tu connais : la technique de la division.

En général : a et b sont deux naturels ($b \neq 0$) et on cherche des encadrements décimaux du rationnel $\frac{a}{b}$. Voici la division à l'étape n :

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline r' & q' \end{array}$$

$$a = b \cdot q' + (r' \cdot 10^{-n})$$
$$0 \leqslant r' < b$$

On pourrait écrire aussi :

$$bq' \leqslant a < bq' + b \cdot 10^{-n}$$
$$bq' \leqslant a < b\,(q' + 10^{-n})$$

A la n-ième étape après le passage de la virgule, le « quotient partiel » est l'approximation décimale par défaut à 10^{-n} près du quotient.

Voir exercices : 1, 2 et 22, 23.

En appliquant la technique de la division, tu peux donc vérifier certaines propriétés des rationnels ; mais cette vérification est presque toujours approchée. Tu ne dois donc pas t'étonner si les calculs ne « tombent » pas exactement juste.

Voir exercices : 3 à 11.

Écriture décimale illimitée des rationnels.

Lorsqu'on pousse « très loin », la technique de la division, les chiffres du quotient finissent toujours par se répéter.

$\frac{1}{3} = 0{,}333\ \ldots$ Les petits points indiquent que le 3 devrait se répéter indéfiniment.

Mais dans $\frac{1}{7} = 0{,}142\,857\ \ldots$, les petits points peuvent ne pas être compris par tout le monde. Alors pour être plus clair on souligne la suite des chiffres qui se répètent.

Comme ceci : $\frac{1}{7} = 0{,}\underline{142\,857}\ \ldots$ $\qquad \frac{1}{3} = 0{,}\underline{3}\ \ldots$

Voir exercices : 17 à 21 et 27, 28.

On a ainsi inventé une « écriture décimale » de tous les rationnels :

- Les décimaux ont une écriture décimale « finie ».
- Les rationnels non décimaux ont une écriture décimale « infinie » (on dit aussi : « un développement décimal illimité ») ; mais une certaine partie, appelée « période », se répète indéfiniment.

Exemple :

$$\begin{array}{r|l} 34 & 7 \\ \hline 60 & 4{,}85 \\ 40 & \\ 5 & \end{array}$$

$4{,}85 < \frac{34}{7}$ [illegible]

à la nième étape après la [illegible]

$q' \leqslant \frac{a}{b} \leqslant q' + 10^{-n}$ [illegible]

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \hline r' & q' \end{array}$$

A la n-ième étape, on a [illegible] il ne faut pas oublier ces [illegible] devraient être inscrits [illegible] partiel.

Prends par exemple :

$$\frac{1\,000}{327}$$

Tous les restes partiels [illegible] inférieurs à 327 ; ils [illegible] valoir soit 0, soit 1, soit 2, [illegible] . . . , soit 326.
Donc en 327 étapes, je [illegible] trouver deux restes partiels [illegible] r_1 et r_2.
A partir du deuxième, r_2, la [illegible] poursuivra évidemment com[illegible] du premier, r_1 : ces étapes se [illegible] alors indéfiniment.