التمرين الأول

ليكن n عددا طبيعيا من $\mathbb{N}^*$. و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = \sqrt{x}\, e^{-nx}$

الجزء الأول :

1) بين أن $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) أ- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين $x_0 = 0$

ب- أحسب المشتقة و ضع جدول تغيرات الدالة f_n

3) أرسم المنحنى (C_1)

الجزء الثاني :

نعتبر في $]0,+\infty[$ المعادلة $(E)\ :\ f_n(x) = x$ و نضع $g_n(x) = 2nx + \ln x$

1) بين أن لكل x من المجال $]0,+\infty[$ لدينا : $g_n(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ f_n(x) = x$

2) أ- أدرس منحى تغيرات الدالة g_n

ب- استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا α_n

3) أحسب $g_{n+1}(\alpha_n)$ بدلالة α_n و بين أن المتتالية $(\alpha_n)_n$ تناقصية ثم أنها متقاربة

4) أ- بين أن $2x - \ln x > 0 \quad (\forall x > 0)$

ب- استنتج أن $\alpha_n \le \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$

الجزء الثالث :

لتكن F_n الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $F_n(x) = \int_1^x f_n(t)\,dt$

1) بين أن F_n قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$ و أدرس منحى تغيرات الدالة F_n

2) أ- بين أن $\sqrt{t} \le t + \dfrac{1}{4} \quad (\forall t \ge 0)$

ب- استنتج أن $F_n(x) \le \dfrac{n+4}{4n^2} \quad (\forall x \ge 0)$ ثم أن $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$

الجزء الرابع

لتكن F الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{4x} f_1(t)\,dt$

1) بين أن $\sqrt{x}e^{-x}\left(1-e^{-3x}\right) \le F(x) \le 2\sqrt{x}e^{-x}\left(1-e^{-3x}\right) \quad (\forall x > 0)$

2) أحسب $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{F(x)}{x}$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين

3) أ- بين أن F قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ وأن $F'(x) = \sqrt{x}\,e^{-4x}\left(8 - e^{3x}\right) \quad (\forall x > 0)$

ب- أدرس منحى تغيرات الدالة F

4) أرسم المنحنى للدالة F (نعطي $F(\ln 2) \simeq 0.5$)

التمرين الثاني

ليكن p عدد أولي أكبر من 7 . و نضع $N = p^4 - 1$

1) أ- بين أن $p^4 \equiv 1\ [3]$

ب- بملاحظة أن العدد p فردي بين أن $p^4 \equiv 1\ [16]$

2) استنتج أن العدد 240 يقسم N

3) هل توجد أعداد أولية $p_1, p_2, ..., p_{15}$ بحيث يكون العدد $n = p_1^4 + p_2^4 + ... + p_{15}^4$ أولي