(7) Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit $w_{i,j} = v_i - v_j$. On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ engendré par la famille $(w_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. Le but de cette question est de trouver la dimension de E.

- *(7a)* Montrer que $w_{i,j}$ est le vecteur nul si et seulement si $i = j$.
- *(7b)* Justifier que E est de dimension inférieure ou égale à n.
- *(7c)* Montrer que la famille $(w_{1,2}, w_{1,3}, w_{1,4}, \ldots, w_{1,n})$ forme une famille libre de $\mathbf{R}^n$.
- *(7d)* Soient i et j deux entiers dans $\{1, \ldots, n\}$; exprimer le vecteur $w_{i,j}$ en fonction des vecteurs $w_{1,2}$, $w_{1,3}$, $w_{1,4}$, ..., $w_{1,n}$.
- *(7e)* Quelle est la dimension de E ?

(8) Soient a et b deux nombres réels. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit $z_{i,j} = av_i + bv_j$. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ engendré par la famille $(z_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. Le but de cette question est de trouver dans quels cas $F = \mathbf{R}^n$.

- *(8a)* Donner un exemple simple de nombres réels a et b pour lequel $F = \mathbf{R}^n$ et un exemple pour lequel $F \neq \mathbf{R}^n$.
- *(8b)* Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ soit inversible.
- *(8c)* On suppose $a^2 \neq b^2$. Trouver deux nombres réels λ et μ tels que $\lambda z_{1,2} + \mu z_{2,1} = v_1$.
- *(8d)* En déduire que, si $a^2 \neq b^2$, alors $F = \mathbf{R}^n$.
- *(8e)* Que pensez-vous du cas $a^2 = b^2$?