(4a) Justifier qu'il existe $y_0 \in [-1,1]$ tel que $|h'(y_0)| = \max_{y\in[-1,1]} |h'(y)|$.

(4b) Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$, on a $|h(x) - h(-x)| \leq 2x \max_{y\in[-x,x]} |h'(y)|$.

(4c) Montrer que, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$,

$$\int_\varepsilon^1 \left|\frac{h(x)-h(-x)}{x}\right| \mathrm{d}x \leq 2\,|h'(y_0)|.$$

(4d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 \left|\frac{h(x)-h(-x)}{x}\right| \mathrm{d}x$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

(5) Soit $h : [-1,1] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(-x)}{x} = 2h'(0)$.

PROBLÈME B.

(6) Pour cette question, soient $v_1 = (1,-1,0)$, $v_2 = (-1,-2,1)$ et $v_3 = (2,0,3)$.

(6a) Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) forme une base de $\mathbf{R}^3$.

(6b) Montrer que $H = \{x \in \mathbf{R}^3 :\ \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2,\ x = \lambda_1(v_2 - v_1) + \lambda_2(v_3 - v_2)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

Pour tout $i \in \{1,2,3\}$ et tout $j \in \{1,2,3\}$, on définit le vecteur $u_{i,j} = v_i - v_j$. On note E_3 le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par la famille $(u_{i,j})_{1\leq i\leq 3, 1\leq j\leq 3}$.

(6c) Donner la liste des vecteurs $u_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$.

(6d) Que vaut $\dim(E_3)$?

Dans toute la suite du problème, $n \geq 1$ désigne un entier naturel quelconque et $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des vecteurs de $\mathbf{R}^n$ tels que la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ forme une base de $\mathbf{R}^n$.