BLAN ALJABR 2017

Matière	**Mathématiques**	**Durée**	**2h**
Niveau	**2ème Bac SM**	**Coefficient**	**9**

Exercice 1

On pose $\boxed{I =]e,+\infty[}$ pour tout x et y de I on pose $\boxed{x * y = e^{1+(1-\ln x)(1-\ln y)}}$

1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I .
2) Montrer que $*$ est associative et commutative dans I .
3) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre ε dans I à déterminer .
4) Montrer que $(I ,*)$ est un groupe commutatif .
5) Montrer que l'ensemble $H = \left\{e^{1+2^n} \ / \ n \in \mathbb{Z}\right\}$ est un sous-groupe de $(I ,*)$.
6) soit T la loi de composition interne définie dans $J =]1,+\infty[$ par :

$\boxed{xTy = (x-1)(y-1)+1}$ Et on considère l'application $\boxed{\begin{array}{l} \varphi : I \longrightarrow J \\ \quad x \longrightarrow \ln x \end{array}}$

   a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(I ,*)$ sur (J ,T).
   b) En déduire que (J ,T) est un groupe commutatif .

Exercice 2

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Les deux parties de cet exercice sont largement indépendantes

PARTIE I

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_a) : z^2 - \left(1+(1+i)a\right)z + ia^2 + a = 0$

1) Vérifier que a est une solution de (E_a)
2) On note par z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_a) tels que $z_1 = a$
   a) Déterminer z_2 et vérifier que $z_2 = iz_1 + 1$
   b) Dans le plan complexe on note par A et B les points d'affixe z_1 respectivement z_2
   Montrer B est l'image de A par une rotation r dont on déterminera le centre et une mesure de son angle

PARTIE II

1) Soit $z \in \mathbb{C}$
   a) Montrer que $|z| = |1+iz| \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = \dfrac{1}{2}$
   b) Déduire l'équivalence $\begin{cases} |z| = |1+iz| \\ |z| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$
2) On considère dans $\mathbb{C}$ le système suivant $(S)\begin{cases} z^n(1+iz) = 1 \\ |z| = 1 \end{cases}$ où n est un entier naturel non nul

a) Montrer que si z est une solution de (S) alors $z \in \left\{e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}\right\}$

b) Vérifier que $1+ie^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1+ie^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

c) Déduire que $e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de (S) si et seulement si $n \equiv -2[12]$

montrer de même que $e^{5i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de (S) si et seulement si $5n \equiv 2[12]$

d) Justifier l'équivalence $5n \equiv 2[12] \Leftrightarrow n \equiv -2[12]$

e) Déduire suivant l'entier naturel n l'ensemble des solutions de (S)

Exercice 3

Dans tout ce qui suite p est un nombre premier tel que $p \equiv 5[6]$ et $p > 3$.

Et on considère dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'équation (E) $x^3 + y^3 = p(1+xy)$

Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ une solution de (E)

On pose $d = x \wedge y$ et soit $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $x = da$ et $y = db$

1) (a) Justifier que $a \wedge b = 1$ et $d^3\left(a^3 + b^3\right) = p(1+d^2ab)$

(b) En remarquant que $1 = (1+d^2ab) - d^2ab$ montrer que $d^3 \wedge \left(1+d^2ab\right) = 1$

(c) Déduire que $d = 1$ ainsi on a donc $\begin{cases} \left(a^3+b^3\right) = p\left(1+ab\right) \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$

2) Montrer que $p \wedge b = 1$ et $p \wedge a = 1$

3) Montrer que $a^3 \equiv -b^3[p]$ et que $a^{p-1} \equiv b^{p-1}[p]$

4) En déduire que $a \equiv -b[p]$ on pourra écrire p sous la forme $p = 5+6k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

5) On pose donc $a+b = pu$ avec $u \in \mathbb{N}^*$, montrer que $u\left(a-b\right)^2 + \left(u-1\right)ab = 1$

en déduire que $\begin{cases} a+b = p \\ |a-b| = 1 \end{cases}$

6) Déduire dans $\mathbb{N}^{*2}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 4

PARTIE I

Soit la fonction définie par f (x) = $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

1) Vérifier que f est impaire et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2) Etudier les variations de f

3) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans vers l'intervalle $I =]-1,1[$, on note f^{-1} sa bijection réciproque (expression de f^{-1} non demandée)

4) Ecrire l'équation de la tangente T au point $O(0,0)$

5) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 1 - f^2(x)$ en déduire que $\forall x \geq 0 : 0 \leq f(x) \leq x$

6) Justifier que $\forall x \geq 0 : 0 \leq 1 - f'(x) \leq x^2$ en déduire $\forall x \geq 0 : 0 \leq x - f(x) \leq \dfrac{x^3}{3}$

7) Pour chaque entier naturel n non nul

on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$ et on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

8)

a. Vérifier que $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq u_n - S_n \leq \dfrac{1}{3n^2}$ en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

(utiliser la question 6 **partie 1)**

9) Construire dans le même repère la tangente T et les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$

soit $\lambda \in]0,1[$. On note S_λ l'aire en cm^2 du domaine

$D_\lambda = \{M(x,y) \in P \,/\, x \in [0,\lambda], y \in [0,\lambda], f(x) \leq y \leq f^{-1}(x)\}$

10) Montrer que la fonction $x \to \ln\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

11) Déduire $S_\lambda = \lambda^2 - 2\ln\left(\dfrac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}\right) cm^2$

PARTIE II

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt & ; \ x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

1) Montrer que F est une fonction impaire

2) Montrer que $\forall x > 0 : f(x)\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq F(x) \leq f(2x)\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$

3) Déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \ln 2$ et que F est continue en 0

4) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que $\forall x > 0 : F'(x) = \dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$

5) En appliquant le théorème des accroissements finis deux fois de suite à la fonction F puis à f montrer que $(\forall x > 0) : 1 - f^2(2x) \leq \dfrac{F(x) - F(0)}{x} \leq 1 - f^2(x)$

6) Déduire que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = 1$

7) Donner le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}^+$

PARTIE III

On considère la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^{\ln(\sqrt{3})} \left(f(t)\right)^n dt$

1) Calculer I_0 et I_1

2)

(a) Vérifier que $\forall t \in \left[0, \ln(\sqrt{3})\right] : 0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq I_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(\sqrt{3})$ et calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+2} = I_n - \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

4) Déduire que $\forall p \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} I_{2p} = I_0 - \displaystyle\sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{2k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \\ I_{2p+1} = I_1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \end{cases}$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $v_n = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{1}{k2^k}$

montrer que (v_n) est convergente et déterminer sa limite