E.4. iv Calcul intégral : approximations numériques

Texte

Objectif : :Calcul de l'approximation numérique d'une intégrale par les méthodes des rectangles, des trapèzes et des points milieux.

Soient les deux fonctions réelles définies par $f(t) = -2t + 5$ et $g(x) = 3^x$.

1. Calculer les deux intégrales I et J suivantes :

$$I = \int_1^2 f(t)\mathrm{d}t \; et \; J = \int_1^2 g(x)\mathrm{d}x \text{ Rappel : } 3^x = e^{xln(3)}$$

Pour le réel J, vous donnerez la valeur exacte et la valeur approchées au dix millionième.

2. Méthode des rectangles :
Les aires $\mathcal{A}_f$ et $\mathcal{A}_g$ sont délimitées par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$, et respectivement la courbe représentative de la fonction f ou g. L'intervalle fermé $[1;2]$ est séparé en n subdivisions de largeur $\frac{1}{n}$. Les aires $\mathcal{A}_f$ et $\mathcal{A}_g$ sont approchées par les suites de nombres définies sur $\mathbb{N}^*$:
$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(1+\frac{k}{n})$ pour l'intégrale I ou $r_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(1+\frac{k}{n})$ pour l'intégrale J d'une part.
$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(1+\frac{k+1}{n})$ pour l'intégrale I ou $R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(1+\frac{k+1}{n})$ pour l'intégrale J d'autre part.

2.1. Donner un encadrement des aires $\mathcal{A}_f$ et $\mathcal{A}_g$ à l'aide des nombres s_n, S_n, r_n et R_n. Pour cette question vous pouvez vous aider du logiciel Géogébra et définir SommeInférieure[f,1,2,5], SommeSupérieure[f,1,2,5], SommeInférieure[g,1,2,5] et SommeSupérieure[g,1,2,5]. Les nombres obtenus vous serons utiles pour la suite du travail pratique. Une impression du schéma obtenu peut être introduite dans vos réponses.
2.2. Calculer les valeurs exactes puis les valeurs approchées au millionième des nombres s_5, S_5, r_5 et R_5. Ensuite, calculer l'amplitude donnant la précision de l'encadrement des intégrales I et J. L'amplitude d'un encadrement, en général notée A, est la différence entre la borne supérieure et la borne inférieure de cet encadrement.
2.3. Démontrer que $s_n = 2 + \frac{1}{n}$ et que $S_n = 2 - \frac{1}{n}$.
2.4. Démontrer que $r_n = \dfrac{6}{n(3^{\frac{1}{n}} - 1)}$ et $R_n = e^{\frac{ln(3)}{n}} r_n$.
2.5. Démontrer que les couplent de suites $\big((s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\big)$ d'une part et $\big((r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}; (R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\big)$ d'autre part sont adjacentes.
2.6. Calcul de I : Calculer les limites des suites numériques $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Retrouver le résultat de l'intégrale I de la première question.
2.7. Calcul de J : À l'aide de la définition du nombre dérivé, démontrer que $\lim_{n\to+\infty} n(3^{\frac{1}{n}} - 1) = ln(3)$. En déduire la limite des suites numériques $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Retrouver le résultat de l'intégrale J de la première question.

3. Méthode des trapèzes :
3.1. Pour la fonction f, en séparant l'intervalle fermé $[1;2]$ en n subdivisions, l'aire $\mathcal{A}_f$ est approchée par la suite formée de la somme des aires des trapèzes, notée $Tf_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(1+\frac{k}{n}) + f(1+\frac{k+1}{n}))$.
Déterminer les valeurs exactes Tf_5, Tf_{10}, Tf_{100} et $Tf_{1\,000}$.
3.2. Que pensez vous de l'erreur réalisée par la méthode des trapèzes sur une fonction affine ? Expliquer.
3.3. Pour la fonction g, en séparant l'intervalle fermé $[1;2]$ en n subdivisions, l'aire $\mathcal{A}_g$ est approchée par la suite formée de la somme des aires des trapèzes, notée $Tg_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(g(1+\frac{k}{n}) + g(1+\frac{k+1}{n}))$.
Déterminer les valeurs approchées au dix millionième de Tg_5, Tg_{10}, Tg_{100} et $Tg_{1\,000}$.

4. Méthode des points milieux :

4.1. Une autre méthode d'approximation avec des aires simples est la méthode des points milieux, parfois appelé méthode du rectangle formé par le point milieu. Ici, pour chaque subdivision l'aire sous la courbe est approchée par l'aire d'un rectangle de longueur $f(\frac{3}{2})$ pour 1 et 2 les bornes de l'intervalle d'intégration avec une seule subdivision. L'approximation est donc donnée par la suite formée de la somme des aires de ces rectangles, notée pour n subdivisions : $PMf_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(1+\frac{k}{n}+\frac{1}{2n})$. Déterminer PMf_5, PMf_{10}, PMf_{100} et $PMf_{1\,000}$.

4.2. Que pensez vous de l'erreur réalisée par la méthode des points milieux sur une fonction affine ? Expliquer.

4.3. De la même manière, pour la fonction g et pour n subdivisions : $PMg_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(1+\frac{k}{n}+\frac{1}{2n})$. Déterminer PMg_5, PMg_{10}, PMg_{100} et $PMg_{1\,000}$.

5. Quelques éléments sur l'erreur commise :

5.1. Calculer s_{10}, S_{10}, s_{100}, S_{100}, $s_{1\,000}$ et $S_{1\,000}$ pour la fonction f.

5.2. Calculer r_{10}, R_{10}, r_{100}, R_{100}, $r_{1\,000}$ et $R_{1\,000}$ pour la fonction g.

5.3. Pour $n = 5$, $n = 10$, $n = 100$ et $n = 1\,000$ calculer pour les fonctions f et g les erreurs commises, notées E_n, entre les trois méthodes et la valeur exacte calculée dans la question 1. Pour la méthode des rectangles, vous pouvez prendre les deux calculs avec les sommes inférieures et les sommes supérieures. Les erreurs seront estimées au dix millionième. Il est judicieux de présenter l'ensemble des résultats dans un tableau synthétique.

5.4. Quel conjecture peut-on faire sur la précision des trois méthodes : méthodes des rectangles, des trapèzes et des points milieux ?

6. Algorithmique :

6.1. Compte tenu des calculs des intégrales I et J et dans le but d'automatiser le calcul d'approximation d'une primitive avec une précision p fixée, quelle(s) question(s) préalable(s) faut-il se poser avant de se lancer dans les calculs ?

6.2. Écrire un algorithme en langage naturel permettant de calculer et d'afficher l'encadrement d'une intégrale d'une fonction continue f sur l'intervalle $[1;2]$ ainsi que l'amplitude de l'encadrement déterminée en fonction de l'entier naturel n saisit par l'utilisateur pour la méthode des rectangles. Pour les méthodes des trapèzes et des points milieux, l'algorithme affichera la valeur approchée de l'intégrale en fonction de l'entier naturel n saisit par l'utilisateur.

7. Question bonus :

Présenter mathématiquement et algorithmiquement la méthode d'approximation du calcul numérique d'une intégrale avec la méthode de Simpson.

8. Programmation : Traduire ces algorithmes sur votre machine à calculer puis sur le langage de programmation Python avec l'éditeur X-Cas. Au préalable, vous demanderez à l'utilisateur si la fonction étudiée est croissante ou décroissante.

9. Question bonus :

Tester vos programmes, avec les intégrales I et J, pour les valeurs de n suivantes : 5, 10, 100, 1000. Maintenant l'intervalle fermé $[1;2]$ est séparé en 2^n segments égaux. Modifier vos algorithmes en conséquence et comparer pour un n fixé la précision des trois méthodes de calculs.