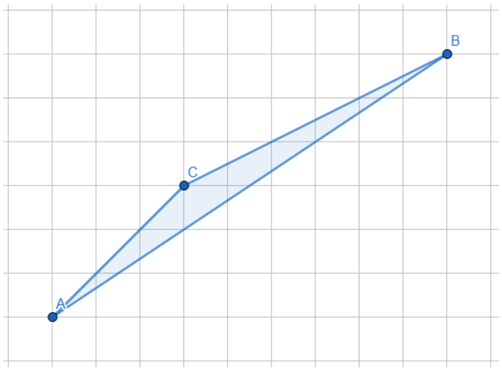
Aire maximale d’un triangle contenant un seul nœud en son intérieur

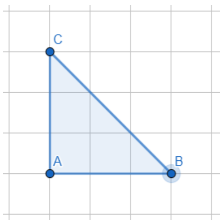
Soit un quadrillage orthonormé et un triangle dont les sommets sont des nœuds de ce quadrillage et qui contient un seul nœud. Son aire est inférieure ou égale à $9/2$.



Pour la suite nous ne considérerons que les triangles dont les sommets sont des nœuds du quadrillage et nous les appellerons simplement “triangle”.

1) Il existe au moins un triangle dont l’aire est $9/2$ et qui ne contient qu’un nœud

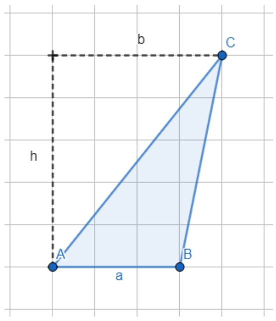
Un exemple est donné en introduction, en voici un autre.



2) Tous les triangles sont équivalents à un triangle canonique

Deux triangles sont dits équivalents s’ils ont la même aire et le même nombre de nœuds intérieur.

Un triangle est dit canonique si sa base est horizontale et son sommet opposé est tel que $a \leq 2b \leq h + a$.

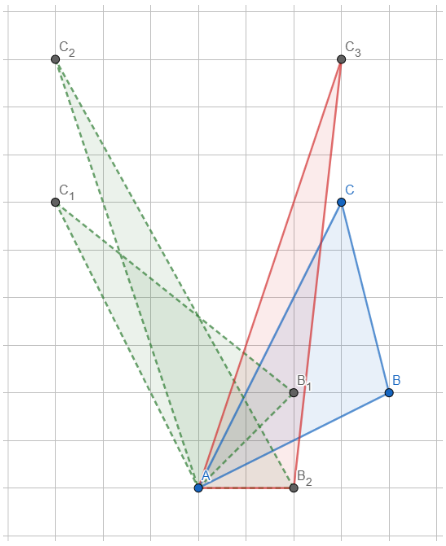


Soit I l’invariant (aire, nombre de nœuds intérieur).

- Les translations par un vecteur entier conservent I.
- Les symétries selon les axes du quadrillage conservent I.
- Les transvections (transformations de type $(x, y) \to (x, y + kx)$ ou $(x, y) \to (x + ky, y)$ avec $k \in Z$) conservent I.

Par translation, on déplace A à l’origine. Par symétries horizontale et/ou verticale, on déplace B dans le premier quadrant.

Soit $B=(b_x,b_y)$, avec $b_x>0$ et $b_y\geq 0$. En appliquant la transvection $(x,y)\to(x,\text{y-}x)$ si $y\geq\ x$ et $(x,y)\to(x\text{-y},y)$ sinon, on garde B dans le premier quadrant mais sa distance (de Manhattan) à l'origine diminue, b_y doit donc s'annuler à un moment et le segment AB sera horizontal.
Par une symétrie, on déplace C au-dessus de l'horizontale.
Soit $C=(b,h)$. En appliquant la transvection $(x,y)\to\left(x-\left\lceil\frac{b-\frac{a+h}{2}}{h}\right\rceil y,y\right)$ et une éventuelle symétrie pour ramener C à droite de $x=\frac{a}{2}$ dans le premier quadrant, on obtient un triangle canonique.
Toutes les opérations conservent I et donc ce dernier triangle est bien équivalent au triangle initial.



3) L'aire maximale d'un triangle canonique avec un noeud intérieur est $9/2$

Soit i le nombre de noeuds intérieurs et f le nombre de points sur la frontière du triangle.

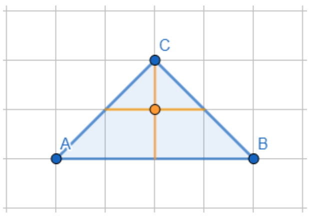
Pour tout triangle canonique avec un noeud intérieur, on a:

- $h\ \geq 2$. En effet, si $h<2$, alors $i\ =\ 0$.
- $a\ \leq 4$. En effet, $\left\lceil\frac{a}{2}\right\rceil-1\ \leq i=1$. Avec $\left\lceil\frac{a}{2}\right\rceil-1$ le nombre minimum de nœuds intérieur sur la droite $y=1$.
- $f\ =ah\ =\ 2A$. En effet, par Pick on a $A=i+\frac{f}{2}-1\Rightarrow\frac{ah}{2}=1+\frac{f}{2}-1$.

Nous allons maintenant séparer les cas $b<a$, $b=a$ et $b>a$.

a. L'aire maximale d'un triangle canonique avec un noeud intérieur et b<a est 4

On a $h\ =\ 2$. En effet, si $h>2$ alors le segment entre C et sa projection sur l'axe horizontal contient $h-1>1$ noeuds intérieurs.
$A=\frac{ah}{2}\leq\frac{2\times 2}{2}=4$. Et elle est réalisée par le triangle suivant :



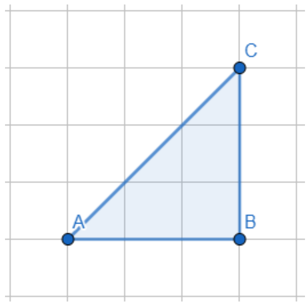
b. **L'aire maximale d'un triangle canonique avec un noeud intérieur et b=a est $9/2$**

On a $2b \leq a + h \Rightarrow 2a \leq a + h \Rightarrow a \leq h \Rightarrow f = ah \leq a^2$.

On a $f \leq 2a + h \rightarrow f \leq 2a + f/a \Rightarrow f \leq \frac{2a^2}{a-1}$.

Le maximum de f pour $a \leq 4$ sous ces contraintes est $f = 9$ pour $a = 3$. Ce qui correspond à une aire maximale de $9/2$.

Cette aire est réalisée par le triangle suivant :



c. **L'aire maximale d'un triangle canonique avec un nœud intérieur et b>a est 3**

On a $2a < 2b \leq a + h \Rightarrow a < h$.

On a $f \leq 2b \Rightarrow ah \leq a + h \Rightarrow h(a-1) \leq a \Rightarrow a(a-1) < a \Rightarrow a - 1 < 1 \Rightarrow a < 2$.

Donc a = 1.

On a $f \leq 2b \Rightarrow ah = h \leq 2b$. Et $2b \leq a + h \Rightarrow 2b - 1 \leq h \leq 2b$.

<u>Si $h = 2b - 1$:</u>

La transvection $(x, y) \rightarrow (x, y - 2x)$ amène le point B en $(1, -2)$ et le point C en $(b, -1)$.

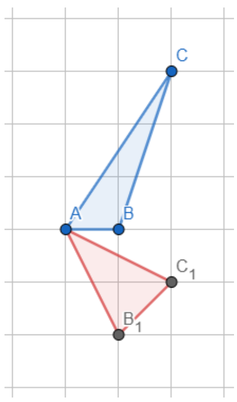
On a $i = b - 1$ et donc $b \leq 2$. $h = 2b - 1 \leq 3$ et l'aire maximale est $3/2$.

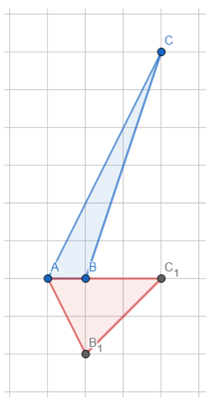
<u>Si $h = 2b$:</u>

La transvection $(x, y) \rightarrow (x, y - 2x)$ amène le point B en $(1, -2)$ et le point C en $(b, 0)$.

On a $i = \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$. Et donc $b \leq 3$. $h = 2b \leq 6$ et l'aire maximale est 3.

Ces deux cas sont réalisés par les triangles ci-dessous :





Les différents cas amenant à des aires maximales de 4, 9/2 et 3. L'aire maximale pour les triangles canoniques avec un nœud intérieur est de 9/2.

Tous les triangles étant équivalents à des triangles canoniques, l'aire maximale des triangles avec un nœud intérieur est de 9/2.

CQFD □