

Soit x un réel. On définit l'approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près par $u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ et l'approximation décimale par excès de x à 10^{-n} près par $v_n = \frac{E(10^n x) + 1}{10^n}$.

a) Montrer que u_n et u_{n+1} ne diffèrent que de la $n+1$ -ième décimale qui vaut 0 pour u_n et a_{n+1} pour u_{n+1} .

b) Montrer que $u_n = \sum_{k=0}^n a_k 10^{-k}$, avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_k \in \{0, \dots, 9\}$ pour $k \in \mathbb{Z}^*$.

c) Montrer que u_n et v_n sont des suites adjacentes encadrant x , donc convergent vers x .