Agrégation Interne
Exemples d'applications du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles.

J. M. Arnaudies, H. Fraysse — *Cours de Mathématiques. Analyse 2.* Dunod (1991).
J. F. Dantzer. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités.* Vuibert (2016).
X. Gourdon. *Les Maths en tête. Analyse.* Ellipses (2004).
E. Leichtnam. *Exercices corrigés de Mathématiques, X et ENS. Analyse.* Ellipses (2000).
J. P. Ramis, A. Warusfel. *Mathématiques tout en un pour la licence. Niveau L2.* Dunod. (2007).
J. P. Ramis, A. Warusfel. *Mathématiques tout en un pour la licence. Niveau L3.* Dunod. (2015).
J. E. Rombaldi. *Éléments d'analyse réelle.* EDP Sciences (2004).
J. E. Rombaldi. *Exercices et problèmes corrigés pour l'agrégation de mathématiques.* deboeck supérieur (2018).
F. Rouviere. *Calcul différentiel.* Cassini (1999).

Exercice 1. Le théorème des accroissements finis et une généralisation de ce théorème sont utilisés pour obtenir des prolongements par continuité ou par dérivabilité

I est un intervalle réel non réduit à un point et f, g sont deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

1. *On suppose que $I =]a, b[$ où $a < b$ sont deux réels et que f est dérivable de dérivée bornée. Montrer que f se prolonge par continuité en a et en b.*
2. *On suppose que f est dérivable sur $I \setminus \{c\}$, où $c \in I$. Montrer que si f' a une limite à gauche [resp. une limite à droite, une limite] ℓ en c, alors f est dérivable à gauche [resp. dérivable à droite, dérivable] en c avec $f'_g(c) = \ell$ [resp. $f'_d(c) = \ell$, $f'(c) = \ell$].*
3. *On suppose que f est dérivable et convexe. Montrer qu'elle est alors continûment dérivable (voir aussi la question **5** de l'exercice 4).*
4. *On suppose que f, g sont dérivables sur $I \setminus \{c\}$, où $c \in I$, avec $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I \setminus \{c\}$. Montrer que si $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \ell$ (règle de l'Hospital). La réciproque de ce résultat est-elle vraie ?*
5. *Montrer que la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier naturel n.*
6. *Calculer $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\arccos(x)}{\sqrt{1 - x^2}}$.*

Exercice 2. Le théorème des accroissements finis et une généralisation de ce théorème sont utilisés pour obtenir des limites à l'infini

f, g sont deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

1. *On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$. Dans le cas particulier où $g(x) = x$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.*

2. *On suppose que* $f(x) > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$ *et que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ell$. *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)} = e^{\ell}$.
3. *On suppose que* f' *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}^+$ *et que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. *Que dire pour* f' *continue ?*
4. *On suppose que* $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + f'(x)) = \ell$.
   (a) *Dans le cas où* $\ell = 0$, *on désigne par* g *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par* $g(x) = e^x f(x)$. *En appliquant le théorème généralisé des accroissements finis au couple de fonctions* $(g, \exp)$, *montrer que pour tous réels* $x > \alpha > 0$, *il existe un réel* $c_{x,\alpha} \in]\alpha, x[$ *tel que :*
   $$f(x) = e^{\alpha - x} f(\alpha) + \left(1 - e^{\alpha - x}\right)\left(f(c_{x,\alpha}) + f'(c_{x,\alpha})\right)$$
   En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   (b) *Pour* ℓ *quelconque, montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
5. *Soit* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \ell$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \ell'$. *Montrer que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(t+1) - \varphi(t))\, dt = \ell - \ell'$. *Calculer* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\arctan(t+1) - \arctan(t))\, dt$.
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} (\arctan(t+1) - \arctan(t))\, dt = \pi$$

Exercice 3. Le théorème des accroissements finis peut être utilisé pour obtenir des résultats sur les fonctions Riemann-intégrables

1. *Soient* $a < b$ *deux réels et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable de dérivée* f' *Riemann-intégrable sur* $[a,b]$. *Montrer que :*
   $$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)$$
2. *Soient* $a < b$ *deux réels et* f, g *deux fonctions à valeurs réelles définies sur* $[a,b]$ *dérivables et de dérivées Riemann-intégrable sur* $[a,b]$. *Montrer que :*
   $$\int_a^b f(x) g'(x)\, dx = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx$$
3. *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable de dérivée* f' *Riemann-intégrable sur* $[0,1]$ *et* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *réelle définie par* $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{n+1} - S_n) = \int_0^1 f(x)\, dx$.

Exercice 4. Le théorème des accroissements finis peut être utilisé pour montrer le théorème de Darboux qui nous dit qu'une fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. On donne ensuite quelques applications du théorème de Darboux

On se donne une fonction f à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle I non réduit à un point et il s'agit de montrer que pour tous $a < b$ dans I et tout λ compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $\lambda = f'(c)$. Dans le cas où $f'(a) = f'(b)$, $c = a$ convient. On suppose donc que $f'(a) < f'(b)$, on se donne $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$ et on définit les fonctions τ_a et τ_b sur $[a,b]$ par :

$$\tau_a(x) = \begin{cases} f'(a) & \text{si } x = a \\ \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \end{cases} \quad \text{et } \tau_b(x) = \begin{cases} f'(b) & \text{si } x = b \\ \dfrac{f(b) - f(x)}{b - x} & \text{si } x \neq b \end{cases}$$

1. *Dans le cas où $\lambda \leq \tau_a(b)$ [resp. $\lambda > \tau_a(b)$] montrer qu'il existe $\alpha \in]a,b]$ [resp. $\alpha \in]a,b[$] tel que $\lambda = \dfrac{f(\alpha) - f(a)}{\alpha - a}$ [resp. $\lambda = \dfrac{f(b) - f(c)}{b - c}$]. Conclure.*
2. *Donner un exemple de fonction qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue.*
3. *Justifier l'existence de fonctions définies sur un intervalle réel qui n'admettent pas de primitive.*
4. *Soient I un intervalle réel non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone telle que $f(I)$ soit un intervalle. Montrer que f est continue sur I.*
5. *Montrer qu'une fonction convexe et dérivable d'un intervalle réel non réduit à un point I dans $\mathbb{R}$ est continûment dérivable.*
6. *Trouver toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $(f'(x))^2 = 1$ pour tout réel x.*
7. *Soient I un intervalle réel non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que s'il existe deux réels $a < b$ dans I tels que $f'(a) = f'(b)$, il existe alors $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$ (il existe un point M du graphe de f tel que la tangente en M passe par $(a, f(a))$).*

Exercice 5. Comparaison série et intégrale

Le théorème des accroissements finis est utilisé pour relier la convergence d'une série numérique $\sum f(n)$ à celle de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ en donnant un équivalent des sommes partielles ou du reste de cette série.

1. *On se donne une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+,*}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \ell \in \mathbb{R}^*$ et on lui associe la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = f(x) - \ell \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que :*
   (a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = e^\ell$;
   (b) $h'(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(f(x))$, $h(x+1) - h(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(f(x))$;
   (c) $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^\ell - 1}{\ell} f(x)$;

(d) *si* $\ell > 0$, *alors la série* $\sum f(n)$ *diverge et* $\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{e^{\ell}-1}\displaystyle\int_0^{n+1} f(t)\,dt$;

(e) *si* $\ell < 0$, *alors la série* $\sum f(n)$ *converge et* $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{e^{\ell}-1}\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt$;

2. *Montrer que, pour tout réel* α *strictement positif, on a* $\sum_{k=1}^{n} \alpha^k \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha^{n+1}}{\alpha-1}\ln(n+1)$.

Exercice 6. Valeurs d'adhérences de $(\cos(n^{\alpha}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $0 < \alpha < 1$ et de $(\cos(\ln(n)))_{n\in\mathbb{N}^*}$

On se donne une fonction $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *telle que* $f'(x) > 0$ *pour tout* $x \in [1,+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ *et on s'intéresse aux valeurs d'adhérences de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par* $u_n = \cos(f(n))$ *pour tout* $n \geq 1$.

1. *Montrer que* f *réalise un* $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme de* $[1,+\infty[$ *sur* $[f(1),+\infty[$ *et qu'on a* $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f^{-1}\right)'(x) = +\infty$.
2. *Soient* $x \in [-1,1]$ *et* $t = \arccos(x) \in [0,\pi]$.

   (a) *Montrer qu'il existe un entier* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout entier* $n \geq n_0$, *il existe un entier naturel* $\varphi(n)$ *tel que :*
   $$f(\varphi(n)) \leq t + 2n\pi < f(\varphi(n)+1) \tag{1}$$

   (b) *Montrer qu'il existe un entier* $n_1 \geq n_0$ *tel que la suite d'entiers* $(\varphi(n))_{n\geq n_1}$ *soit strictement croissante.*

   (c) *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} (t + 2n\pi - f(\varphi(n))) = 0$.

   (d) *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_{\varphi(n)}\right) = x$.

   (e) *En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est* $[-1,1]$.
3. *Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites* $(\cos(n^{\alpha}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *pour* $0 < \alpha < 1$ *et* $(\cos(\ln(n)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est* $[-1,1]$.

Exercice 7. Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale sur un segment

Soient I *est un intervalle réel non réduit à un point,* $a < b$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* f *une fonction à valeurs réelles définie et continue sur* $I \times [a,b]$ *telle que la dérivée partielle* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *existe en tout point de* $I \times [a,b]$, *la fonction* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *étant continue sur* $I \times [a,b]$.

1. *Montrer que la fonction* φ *définie sur* I *par* $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt$ *est dérivable sur* I *de dérivée* $\varphi'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

2. *Soient F, G les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :*

$$F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2, \; G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt$$

Montrer que $F' + G' = 0$, puis en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3. *Montrer que si u, v sont deux fonctions dérivables de I dans $[a, b]$, alors la fonction ψ définie sur I par* $\psi(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t)\, dt$ *est dérivable sur I de dérivée :*

$$\psi'(x) = f(x, v(x))\, v'(x) - f(x, u(x))\, u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt$$

Exercice 8. Majoration de l'erreur dans la méthode de Simpson

Étant donnée une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^4$, en notant :

$$E(f) = \int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

l'erreur dans la méthode de Simpson sur $[a, b]$, on se propose de montrer que $|E(f)| \leq \dfrac{M_4}{2880}(b-a)^5$, *où* $M_4 = \displaystyle\sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$.

Cette façon de procéder pour obtenir une majoration l'erreur de quadrature est encore valable pour la méthode du point milieu ou la méthode du trapèze.

1. *On considère tout d'abord le cas d'une fonction $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^4$. En notant* $L_4 = \displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} \left|g^{(4)}(x)\right|$ *et φ la fonction définie sur $[0, 1]$ par :*

$$\forall x \in [0, 1], \; \varphi(x) = \int_{-x}^x g(t)\, dt - \frac{x}{3}\left(g(-x) + 4g(0) + g(x)\right)$$

montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$\left|\varphi''(x)\right| \leq 2\frac{x^3}{9} L_4, \; \left|\varphi'(x)\right| \leq \frac{x^4}{18} L_4, \; \left|\varphi(x)\right| \leq \frac{x^5}{90} L_4$$

2. *En déduire le résultat annoncé.*

Exercice 9. Un classique

Soient I un intervalle ouvert non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à laquelle on associe la fonction $\varphi : I^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} & si\ y \neq x \\ f'(x) \;\; si\ y = x \end{cases}$$

1. *Montrer que φ est continue sur I^2 et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I^2 \setminus \Delta$, où $\Delta = \{(x, x) \mid x \in I\}$.*

2. *Dans le cas où f est deux fois dérivable en un point $a \in I$, montrer que φ est différentiable en (a, a).*

Exercice 10. Un système non linéaire de deux équations à deux inconnues

Pour toute application linéaire $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, on note $\|u\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ (on peut choisir la norme infini sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$).

1. *Soient $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Montrer que si a, b sont deux points distincts de $\mathcal{O}$ tels que le segment $[a, b]$ soit contenu dans $\mathcal{O}$, il existe alors un point $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = df(c)(b - a)$.*
2. *Soient $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable et a, b deux points distincts de $\mathcal{O}$ tels que $[a, b] \subset \mathcal{O}$ et il existe une constant $\mu > 0$ telle que $\|df(c)\| \leq \mu$ pour tout $c \in [a, b]$. Montrer que $\|f(b) - f(a)\| \leq \mu \|b - a\|$.*
3. *Montrer que le système d'équations :*

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 2x \\ \cos(x - y) = 2y \end{cases}$$

a une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11. Inégalité des accroissements finis sur un espace normé

Soient f une fonction définie sur un segment $[a, b]$, à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et g une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, ces fonctions étant continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

1. *On suppose que $\|f'(x)\| < g'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$. Pour α donné dans $]a, b[$, on note :*

$$E_\alpha = \{x \in]\alpha, b[\mid \|f(x) - f(\alpha)\| > g(x) - g(\alpha)\}$$

   (a) *Montrer que E_α est ouvert.*

   (b) *En supposant E_α non vide, on note β sa borne inférieure. Montrer que $\beta \in]\alpha, b[$ et en déduire une contradiction.*

   (c) *Montrer que $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.*

2. *On suppose que $\|f'(x)\| \leq g'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$.*

   (a) *Montrer que $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$ (inégalité des accroissements finis généralisée).*

   (b) *Montrer que si l'égalité $\|f(b) - f(a)\| = g(b) - g(a)$ est réalisé, on a alors $\|f(y) - f(x)\| = g(y) - g(x)$ pour tous $x < y$ dans $[a, b]$ et $\|f'(x)\| = g'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$.*