Algèbres de Poisson

Par Eugène Okassa

Résumé

On étudie les algèbres de Poisson. On décrit la cohomologie de Poisson d'une algèbre de Poisson.

1 Algèbres de Lie-Rinehart-Poisson

On considère A une algèbre commutative unitaire sur un corps commutatif K de caractéristique nulle. On note $Der_K(A)$ le A-module des dérivations de A.

Soit $\mathcal{G}$ un A-module muni d'une structure de K-algèbre de Lie et

$$\mathfrak{L}_{alt}(\mathcal{G}, A) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \mathfrak{L}^p_{alt}(\mathcal{G}, A)$$

où $\mathfrak{L}^p_{alt}(\mathcal{G}, A)$ est le A-module des p-formes multilinéaires alternées sur $\mathcal{G}$.

Proposition 1 *Si*

$$Ann(\mathcal{G}) = \{a \in A/a \cdot x = 0 \text{ pour tout } x \in \mathcal{G})\}$$

est l'annulateur de $\mathcal{G}$ et si

$$\rho : \mathcal{G} \longrightarrow Der_K(A)$$

est un morphisme de A-modules vérifiant

$$[x, a \cdot y] = \rho(x)(a) \cdot y + a \cdot [x, y]$$

pour tout $a \in A$ et, pour tous x et y appartenant à $\mathcal{G}$, alors

$$([\rho(x), \rho(y)] - \rho\,[x, y])(a) \in Ann(\mathcal{G}).$$

Démonstration: *Pour tout $a \in A$ et pour tous x , y ,z appartenant à $\mathcal{G}$, on a*

$$\begin{aligned}
& ([\rho(x), \rho(y)] - \rho\,[x,y])(a)\cdot z \\
= \;& \rho(x)\,[\rho(y)]\,(a)\cdot z - \rho(y)\,[\rho(x)]\,(a)\cdot z - \rho\,[x,y])(a)\cdot z \\
= \;& [x, [\rho(y)]\,(a)\cdot z] - [\rho(y)]\,(a)\cdot [x,z] - [y, [\rho(x)]\,(a)\cdot z] \\
& + [\rho(x)]\,(a)\cdot [y,z] - [[x,y]\,, a\cdot z] + a\cdot [[x,y]\,, z] \\
= \;& [x, [y, a\cdot z] - a\cdot [y,z]] - [y, a\cdot [x,z]] + a\cdot [y,[x,z]] - [y,[x,a\cdot z] - a\cdot [x,z]] \\
& + [x, a\cdot [y,z]] - a\cdot [x,[y,z]] - [[x,y]\,, a\cdot z] + a\cdot [[x,y]\,, z] \\
= \;& [x,[y,a\cdot z]] - [x, a\cdot [y,z]] - [y, a\cdot [x,z]] + a\cdot [y,[x,z]] - [y,[x,a\cdot z]] + [y, a\cdot [x,z]] \\
& + [x, a\cdot [y,z]] - a\cdot [x,[y,z]] - [[x,y]\,, a\cdot z] + a\cdot [[x,y]\,, z] \\
= \;& -a\cdot ([x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]]) \\
= \;& 0.
\end{aligned}$$

D'où l'assertion. ■

Definition 2 *Une structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur $\mathcal{G}$ est la donnée d'un morphisme à la fois de A-modules et de K-algèbres de Lie*

$$\rho : \mathcal{G} \longrightarrow Der_K(A)$$

tel que, pour tout $a \in A$ et, pour tous x et y appartenant à $\mathcal{G}$,

$$[x, a\cdot y] = \rho(x)(a)\cdot y + a\cdot [x,y]\,.$$

On dit que $(\mathcal{G}, \rho)$ est une algèbre de Lie-Rinehart.

Exemple 3 *Lorsque V est une variété différentielle et lorsque $\mathfrak{X}(V)$ est le $C^\infty(V)$-module des champs de vecteurs sur V, alors le couple $(\mathfrak{X}(V), id_{\mathfrak{X}(V)})$ est une algèbre de Lie-Rinehart.*

Lorsque (E, π, V) est un algébroïde de Lie d'application ancre ρ et lorsque $\Gamma(E)$ est le $C^\infty(V)$-module des sections de (E, π, V), alors le couple $(\Gamma(E), \rho)$ est une algèbre de Lie-Rinehart.

Lorsque $(\mathcal{G}, \rho)$ est une algèbre de Lie-Rinehart, on note

$$d_\rho : \mathfrak{L}_{alt}(\mathcal{G}, A) \longrightarrow \mathfrak{L}_{alt}(\mathcal{G}, A)$$

la différentielle de degré $+1$ et de carré nul associée à la représentation ρ. On rappelle que pour $p \in \mathbb{N}$, pour $f \in \mathfrak{L}^p_{alt}(\mathcal{G}, A)$ et pour $x_1, x_2, ..., x_{p+1}$ appartenant à $\mathcal{G}$, on a

$$\begin{aligned}
& d_\rho f(x_1, x_2, ..., x_{p+1}) \\
& = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \rho(x_i)\,[f(x_1, x_2, ..., \widehat{x_i}, ..., x_{p+1})] + \\
& \sum_{1\leq i<j\leq p+1} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j]\,, x_1, x_2, ..., \widehat{x_i}, ..., \widehat{x_j}, ..., x_{p+1})
\end{aligned}$$

où les termes chapautés signifient qu'ils ont été omis.

Proposition 4 *La différentielle*

$$d_\rho : \mathfrak{L}_{alt}(\mathcal{G}, A) \longrightarrow \mathfrak{L}_{alt}(\mathcal{G}, A)$$

est une dérivation de degré $+1$.

Definition 5 *Une structure d'algèbre de Lie-Rinehart-Poisson sur une algèbre de Lie-Rinehart* $(\mathcal{G}, \rho)$ *est la donnée d'une* 2*-forme alternée*

$$\mu : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow A$$

telle que

$$d_\rho \mu = 0.$$

On dit que $(\mathcal{G}, \rho, \mu)$ est une algèbre de Lie-Rinehart-Poisson.

Ainsi une 2-forme différentielle fermée sur une variété différentielle V détermine une structure d'algèbre de Lie-Rinehart-Poisson sur $\mathfrak{X}(V)$.

On note $\mathcal{G}^*$ le A-module des formes linéaires sur A.

Definition 6 *Une algèbre de Lie-Rinehart-Poisson,* $(\mathcal{G}, \rho, \mu)$*, est dite algèbre de Lie-Rinehart-Poisson symplectique si la* 2*-forme alternée* μ *est nondégénérée, c'est-à-dire si l'application*

$$\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}^*, x \longmapsto i_x \mu,$$

est un isormorphisme de A*-modules.*

Lorsque μ est nondégénérée, on dit que $(\mathcal{G}, \rho, \mu)$, est une algèbre de Lie-Rinehart-Poisson symplectique.

Ainsi une variété symplectique est munie d'une structure d'algèbre de Lie-Rinehart-Poisson symplectique.

Pour $x \in \mathcal{G}$, l'application

$$i_x : \mathfrak{L}_{alt}(\mathcal{G}, A) \longrightarrow \mathfrak{L}_{alt}(\mathcal{G}, A)$$

telle que, pour $x_1, x_2, ..., x_{p-1}$ appartenant à $\mathcal{G}$ et pour $f \in \mathfrak{L}^p_{alt}(\mathcal{G}, A)$,

$$(i_x f)(x_1, x_2, ..., x_{p-1}) = f(x, x_1, x_2, ..., x_{p-1}),$$

est une dérivation de degré -1.

Proposition 7 *Pour* $x \in \mathcal{G}$, $\theta_x = [i_x, d_\rho]$ *est une dérivation de degré zéro et pour* $y \in \mathcal{G}$*, pour* $a \in A$*, on a*

$$\begin{aligned} [\theta_x, i_y] &= \theta_x \circ i_y - i_y \circ \theta_x \\ &= i_{[x,y]} \; ; \\ \theta_x \circ d_\rho &= d_\rho \circ \theta_x \; ; \\ \theta_x a &= [\rho(x)] (a). \end{aligned}$$

1.1 Le module des différentielles de Kähler

Dans cette partie, A est une algèbre commutative unitaire sur un corps commutatif K de caractéristique nulle. On note 1_A l'élément-unité de A. Les produits tensoriels sont sur K.

Les applications

$$\mu_1 : A \longrightarrow A \otimes A, a \longmapsto a \otimes 1_A,$$

et

$$\mu_2 : A \longrightarrow A \otimes A, a \longmapsto 1_A \otimes a,$$

sont des morphismes de K-algèbres et sont respectivement appelées $1er$ facteur et $2ème$ facteur.

On munit la K-algèbre $A \otimes A$ de la structure de A-module définie par le $1er$ facteur μ_1. Ainsi pour a, b, c dans A, on a :

$$a \cdot (b \otimes c) = (a \cdot b \otimes c)$$

et

$$(b \otimes c) \cdot a = (a \cdot b \otimes c).$$

Ainsi on remarquera que

$$a \cdot (b \otimes c) \neq (b \otimes a \cdot c).$$

L'application

$$A \times A \longrightarrow A, (a, b) \longmapsto a \cdot b$$

est K-bilinéaire symétrique. Elle induit une application K-linéaire et une seule, appelée multiplication,

$$m : A \otimes A \longrightarrow A$$

telle que

$$m(a \otimes b) = a \cdot b$$

pour tous a et b dans A.

On notera que la multiplication m est un morphisme de K-algèbres.

Proposition 8 *Le noyau I de m est le A-sous-module de $A \otimes A$ engendré par les éléments de la forme $a \otimes 1_A - 1_A \otimes a$ avec $a \in A$.*

Démonstration: Tout élément $x \in I$ s'écrit

$$x = \sum_{j \in J : fini} a_j \otimes b_j$$

avec

$$\sum_{j \in J : fini} a_j \cdot b_j = 0.$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{j\in J:fini} a_j \otimes b_j \\
x &= \sum_{j\in J:fini} a_j \otimes b_j - (\sum_{j\in J:fini} a_j \cdot b_j) \otimes 1_A \\
&= \sum_{j\in J:fini} a_j \cdot (1_A \otimes b_j) - \sum_{j\in J:fini} a_j \cdot (b_j \otimes 1_A) \\
&= \sum_{j\in J:fini} a_j \cdot (1_A \otimes b_j - b_j \otimes 1_A) \\
&= \sum_{j\in J:fini} -a_j \cdot (b_j \otimes 1_A - 1_A \otimes b_j).
\end{aligned}$$

D'où l'assertion. ∎

Definition 9 *Le A-module*

$$\Omega_K(A) = I/I^2$$

est le K-module des différentielles de A ou le module des différentielles de Kähler de A.

Pour $a \in A$, on note $\overline{a \otimes 1_A - 1_A \otimes a}$ la classe de $a \otimes 1_A - 1_A \otimes a$ dans $\Omega_K(A)$.

Proposition 10 *L'image de l'application*

$$d_{A/K} : A \longrightarrow \Omega_K(A), a \longmapsto \overline{a \otimes 1_A - 1_A \otimes a},$$

engendre $\Omega_K(A)$.

Démonstration: Pour $x \in I$, on a

$$\sum_{j\in J:fini} a_j \cdot (b_j \otimes 1_A - 1_A \otimes b_j).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \sum_{j\in J:fini} a_j \cdot \overline{(b_j \otimes 1_A - 1_A \otimes b_j)} \\
&= \sum_{j\in J:fini} a_j \cdot d_{A/K}(b_j).
\end{aligned}$$

∎

Proposition 11 *L'application*

$$d_{A/K} : A \longrightarrow \Omega_K(A), a \longmapsto \overline{a \otimes 1_A - 1_A \otimes a},$$

est une K-dérivation.

Démonstration: Pour a et b dans A, on a $(a\otimes 1_A - 1_A\otimes a)(b\otimes 1_A - 1_A\otimes b) \in I^2$, c'est-à-dire

$$\overline{(a\cdot b)\otimes 1_A - a\otimes b - b\otimes a + 1_A\otimes (a\cdot b)} = 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
& d_{A/K}(a\cdot b) \\
= \; & \overline{(a\cdot b)\otimes 1_A - 1_A\otimes (a\cdot b)} \\
= \; & \overline{(a\cdot b)\otimes 1_A - 1_A\otimes (a\cdot b)} \\
& + \overline{(a\cdot b)\otimes 1_A - a\otimes b - b\otimes a + 1_A\otimes (a\cdot b)} \\
= \; & \overline{(a\cdot b)\otimes 1_A - 1_A\otimes (a\cdot b) + (a\cdot b)\otimes 1_A - a\otimes b - b\otimes a + 1_A\otimes (a\cdot b)} \\
= \; & \overline{(a\cdot b)\otimes 1_A - a\otimes b} + \overline{(a\cdot b)\otimes 1_A - b\otimes a} \\
= \; & a\cdot \overline{(b\otimes 1_A - 1_A\otimes b)} + \overline{(a\otimes 1_A - 1_A\otimes a)}\cdot b \\
= \; & \overline{(a\otimes 1_A - 1_A\otimes a)}\cdot b + a\cdot \overline{(b\otimes 1_A - 1_A\otimes b)} \\
= \; & d_{A/K}(a)\cdot b + a\cdot d_{A/K}(b).
\end{aligned}$$

Comme $d_{A/K}$ est manifestement K-linéaire, on conclut que $d_{A/K}$ est une K-dérivation. ∎

Théorème 12 *Le couple $(\Omega_K(A), d_{A/K})$ est solution du problème d'applications universelles suivant : Pour tout A-module M et pour toute K-dérivation*

$$X : A \longrightarrow M,$$

il existe une application A-linéaire et une seule

$$\widetilde{X} : \Omega_K(A) \longrightarrow M$$

telle que

$$\widetilde{X} \circ d_{A/K} = X.$$

Si (F,β) est un couple où F est un A-module et

$$\beta : A \longrightarrow F$$

est une K-dérivation tels que pour tout A-module M et pour toute K-dérivation

$$Y : A \longrightarrow \Omega_K(A),$$

il existe une application A-linéaire et une seule

$$\widetilde{Y} : \Omega_K(A) \longrightarrow M$$

telle que

$$\widetilde{Y} \circ \beta = Y,$$

alors il existe un isomorphisme de A-modules

$$\alpha : \Omega_K(A) \longrightarrow F$$

tel que

$$\alpha \circ d_{A/K} = \beta.$$

Démonstration: L'unicité de l'application $\widetilde{X}$ est liée au fait que l'image de $d_{A/K}$ engendre $\Omega_K(A)$.

Démontrons l'existence. Soit

$$X : A \longrightarrow M$$

une dérivation. L'application

$$A \times A \longrightarrow M, (a, b) \longmapsto a \cdot X(b)$$

est K-bilinéaire et induit une unique application K-linéaire

$$X_0 : A \otimes A \longrightarrow M$$

telle que

$$X_0(a \otimes b) = a \cdot X(b)$$

pour tous a et b dans A. Compte tenu de la structure de A-module définie sur $A \otimes A$, l'application

$$X_0 : A \otimes A \longrightarrow M$$

est A-linéaire puisque

$$\begin{aligned} & X_0(a \cdot \sum_{j \in J : fini} a_j \otimes b_j) \\ = \ & X_0(\sum_{j \in J : fini} a \cdot a_j \otimes b_j) \\ = \ & \sum_{j \in J : fini} a \cdot a_j \cdot X(b_j) \\ = \ & a \cdot \sum_{j \in J : fini} a_j \cdot X(b_j) \\ = \ & a \cdot X_0 \left[\sum_{j \in J : fini} (a_j \otimes b_j) \right]. \end{aligned}$$

. La restriction

$$\overline{X} = X_0|_I : I \longrightarrow M$$

de X_0 à I est donc est A-linéaire.

Aussi $\overline{X}(I^2) = 0$ puisque

$$\begin{aligned} & \overline{X} \left[(a \otimes 1_A - 1_A \otimes a)(b \otimes 1_A - 1_A \otimes b) \right] \\ = \ & \overline{X}(a \cdot b \otimes 1_A - a \otimes b - b \otimes a + 1_A \otimes a \cdot b) \\ = \ & a \cdot b \cdot X(1_A) - a \cdot X(b) - b \cdot X(a) + X(a \cdot b) \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

puisque X est une dérivation.

Ainsi, il existe une application A-linéaire et une seule

$$\widetilde{X} : \Omega_K(A) \longrightarrow M$$

telle que

$$\widetilde{X}(\overline{a \otimes 1_A - 1_A \otimes a}) = X(a)$$

pour tout $a \in A$ i.e.

$$\widetilde{X} \circ d_{A/K} = X.$$

La deuxième partie de la démonstration est évidente. ■

Corollaire 13 *Pour tout A-module M, l'application*

$$Hom_A(\Omega_K(A), M) \longrightarrow Der_K(A, M), \psi \longmapsto \psi \circ d_{A/K},$$

est un isomorphisme de A-modules.

En notant $\Omega_K(A)^*$ le dual du A-module $\Omega_K(A)$, on a :

Corollaire 14 *L'application*

$$\sigma_A : \Omega_K(A)^* \longrightarrow Der_K(A), \psi \longmapsto \psi \circ d_{A/K},$$

est un isomorphisme de A-modules.

1.2 Dérivée de Lie par rapport à une dérivation

On note $\Lambda_A [\Omega_K(A] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_A^n [\Omega_K(A)]$ la A-algèbre extérieure du A-module $\Omega_K(A)$. La dérivation

$$d_{A/K} : A \longrightarrow \Omega_K(A)$$

canonique se prolonge en une dérivation, notée encore $d_{A/K}$, de degré $+1$

$$d_{A/K} : \Lambda_A [\Omega_K(A] \longrightarrow \Lambda_A [\Omega_K(A]$$

telle que le couple $(\Lambda_A [\Omega_K(A)], d_{A/K})$ soit un complexe différentiel.

Lorsque $\varphi \in Der_K(A)$, pour un entier $p \geq 1$, l'application

$$\sigma_\varphi : [\Omega_K(A)]^p \longrightarrow \Lambda_A^{p-1} [\Omega_K(A], (x_1, x_2, ..., x_p) \longmapsto \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \varphi(x_i) \cdot x_1 \Lambda x_2 \Lambda, ..., \Lambda \widehat{x_i} \Lambda ... \Lambda x_p$$

est A-multilnéaire alternée. On note

$$i_\varphi : \Lambda_A [\Omega_K(A)] \longrightarrow \Lambda_A [\Omega_K(A)]$$

l'unique aplication A-linéaire telle

$$i_\varphi(x_1 \Lambda x_2 \Lambda ... \Lambda x_p) \longmapsto \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \varphi(x_i) \cdot x_1 \Lambda x_2 \Lambda, ..., \Lambda \widehat{x_i} \Lambda ... \Lambda x_p$$

pour tout p. L'application

$$i_\varphi : \Lambda_A \left[\Omega_K(A)\right] \longrightarrow \Lambda_A \left[\Omega_K(A)\right]$$

est une dérivaton de degré -1.

L'application

$$\mathfrak{L}_\varphi = i_\varphi \circ d_{A/K} + d_{A/K} \circ i_\varphi : \Lambda_A \left[\Omega_K(A)\right] \longrightarrow \Lambda_A \left[\Omega_K(A)\right]$$

est la dérivée de Lie par rapport à la dérivation φ.

Proposition 15 *Pour $\varphi \in Der_K(A)$, pour $x \in \Omega_K(A)$, et pour $a \in A$, alors,*

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{a\cdot\varphi}(x) &= a \cdot \mathfrak{L}_\varphi(x) + \widetilde{\varphi}(x) \cdot d_{A/K}(a)\,; \\ \mathfrak{L}_\varphi(ax) &= \varphi(a) \cdot x + a \cdot \mathfrak{L}_\varphi(x)\,; \\ \mathfrak{L}_\varphi \left[d_{A/K}(a)\right] &= d_{A/K}\left[\varphi(a)\right]. \end{aligned}$$

Démonstration: Pour $\varphi \in Der_K(A)$, pour $x \in \Omega_K(A)$, et pour $a \in A$, on a

$$\begin{aligned} & \mathfrak{L}_{a\cdot\varphi}(x) \\ = \; & i_{a\cdot\varphi}\left[d_{A/K}(x)\right] + d_{A/K}\left[i_{a\cdot\varphi}(x)\right] \\ = \; & a \cdot i_\varphi\left[d_{A/K}(x)\right] + d_{A/K}\left[a \cdot i_\varphi(x)\right] \\ = \; & a \cdot i_\varphi\left[d_{A/K}(x)\right] + i_\varphi(x) \cdot d_{A/K}(a) + a \cdot d_{A/K}\left[i_\varphi(x)\right] \\ = \; & a \cdot \mathfrak{L}_\varphi(x) + \widetilde{\varphi}(x) \cdot d_{A/K}(a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{L}_\varphi(ax) \\ = \; & i_\varphi\left[d_{A/K}(a \cdot x)\right] + d_{A/K}\left[i_\varphi(a \cdot x)\right] \\ = \; & i_\varphi\left[d_{A/K}(a)\Lambda x + a \cdot d_{A/K}(x)\right] + d_{A/K}\left[a \cdot i_\varphi(x)\right] \\ = \; & \varphi(a) \cdot x - d_{A/K}(a) \cdot \widetilde{\varphi}(x) + a \cdot \varphi(x) \\ & + d_{A/K}(a) \cdot \widetilde{\varphi}(x) + a \cdot d_{A/K}\left[i_\varphi(x)\right] \\ = \; & \varphi(a) \cdot x + a \cdot \mathfrak{L}_\varphi(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \mathfrak{L}_\varphi\left[d_{A/K}(a)\right] \\ = \; & i_\varphi\left[d_{A/K}(d_{A/K}(a))\right] + d_{A/K}\left[i_\varphi(d_{A/K}(a))\right] \\ = \; & 0 + d_{A/K}\left[\varphi(a)\right] \\ = \; & d_{A/K}\left[\varphi(a)\right]. \end{aligned}$$

■

1.3 Algèbres de Poisson

Definition 16 *On dit que A est une algèbre de Poisson si A est munie d'une structure de K-algèbre de Lie, de crochet $\{,\}$, telle que pour tout $a \in A$, la dérivation intérieure*

$$ad(a) : A \longrightarrow A, b \longmapsto \{a, b\}$$

soit une K-dérivation de l'algèbre commutative A.

Ainsi pour a, b et c appartenant à A, on a

$$\{a, b \cdot c\} = \{a, b\} \cdot c + b \cdot \{a, c\}.$$

On dit que $\{a, b\}$ est le crochet de Poisson des éléments a et b de A.

Proposition 17 *Lorsque A est une algèbre de Poisson, l'élément-unité 1_A de A appartient au centre de l'algèbre de Lie $(A, \{,\})$.*

Démonstration: Pour tout $a \in A$, comme

$$ad(a) : A \longrightarrow A, b \longmapsto \{a, b\}$$

est une dérivation de l'algèbre commutative, alors $[ad(a)](1_A) = 0$ c'est-à-dire $\{a, 1_A\} = 0$.

D'où l'assertion. ■

Definition 18 *On dit qu'une variété diférentielle V est une variété de Poisson si l'algèbre, $C^\infty(V)$, des fonctions numériques de classe C^∞ sur V est une algèbre de Poisson.*

Exemple 19 *Si (V, Ω) est une variété symplectique et si pour $f \in C^\infty(V)$, X_f est l'unique champ de vecteurs sur V tel que*

$$i_{X_f}\Omega = df,$$

alors l'application

$$\{,\} : C^\infty(V) \times C^\infty(V) \longrightarrow C^\infty(V), (f, g) \longmapsto -\Omega(X_f, X_g),$$

définit une structure d'algèbre de Poisson sur $C^\infty(V)$.

1.3.1 La 2-forme de Poisson d'une algèbre de Poisson

L'application

$$ad : A \longrightarrow Der_K(A), a \longmapsto ad(a)$$

étant une K-dérivation, compte tenu de la propriété universelle du A-module $\Omega_K(A)$, il existe une application A-linéaire et une seule

$$\widetilde{ad} : \Omega_K(A) \longrightarrow Der_K(A)$$

telle que

$$\widetilde{ad} \circ d_{A/K} = ad.$$

Soit

$$\sigma_A : \Omega_K(A)^* \longrightarrow Der_K(A), \psi \longmapsto \psi \circ d_{A/K},$$

l'isomorphisme canonique. On notera que $\varphi \in Der_K(A)$, alors $\left[\sigma_A^{-1}(\varphi)\right] \circ d_{A/K} = \varphi$.

Proposition 20 *L'application A-linéaire*

$$-(\sigma_A^{-1} \circ \widetilde{ad}) : \Omega_K(A) \longrightarrow \Omega_K(A)^*$$

induit une forme A-bilinéaire alternée

$$\omega : \Omega_K(A) \times \Omega_K(A) \longrightarrow A, (x, y \longmapsto -\left[(\sigma_A^{-1} \circ \widetilde{ad})(x)\right](y)$$

Démonstration: L'application ω est A-bilinéaire. Elle est alternée puisque pour $x = \sum_{j \in J:fini} a_j \cdot d_{A/K}(b_j)$ appartenant à $\Omega_K(A)$, on a

$$\begin{aligned}
& \omega(x, x) \\
= \; & -\left[(\sigma_A^{-1} \circ \widetilde{ad})(x)\right](x) \\
= \; & -\sum_{j \in J:fini} a_j \cdot \left[(\sigma_A^{-1} \circ \widetilde{ad})(x)\right] d_{A/K}(b_j) \\
= \; & -\sum_{j \in J:fini} a_j \cdot \left[\widetilde{ad}(x)\right](b_j) \\
= \; & -\sum_{j,k \in J:fini} a_j \cdot a_k \cdot \left[\widetilde{ad}(d_{A/K}(b_k))\right](b_j) \\
= \; & -\sum_{j,k \in J:fini} a_j \cdot a_k \cdot \left[ad(b_k)\right](b_j) \\
= \; & -\sum_{j,k \in J:fini} a_j \cdot a_k \cdot \{b_k, b_j\} \\
= \; & 0.
\end{aligned}$$

■

Definition 21 *La 2-forme ω est la 2-forme de Poisson de l'algèbre de Poisson A.*

Lorsque V est une variété de Poisson, la 2-forme de Poisson de l'algèbre de Poisson $C^\infty(V)$ est le 2-tenseur de Poisson.

Proposition 22 *Si A est une algèbre de Poisson de 2-forme de Poisson ω, alors*

$$\{a, b\} = -\omega(d_{A/K}(a), d_{A/K}(b))$$

pour tous a et b dans A.

Démonstration: On a

$$\begin{aligned} & \omega(d_{A/K}(a), d_{A/K}(b)) \\ = & -\left[(\sigma_A^{-1} \circ \widetilde{ad})(d_{A/K}(a))\right](d_{A/K}(b)) \\ = & -\left[\widetilde{ad}(d_{A/K}(a))\right](b) \\ = & -[ad(a)](b) \\ = & -\{a, b\}. \end{aligned}$$

D'où l'assertion. ■

Proposition 23 *Si A est une algèbre de Poisson de 2-forme de Poisson ω, pour tout $x \in \Omega_K(A)$ et pour tout $a \in A$, alors*

$$\left[\widetilde{ad}\ (x)\right](a) = -\omega(x, d_{A/K}(a))$$

Démonstration: Lorsque $\varphi \in Der_K(A)$, comme $\sigma_A^{-1}(\varphi) \circ d_{A/K} = \varphi$, alors pour $x \in \Omega_K(A)$, on a

$$\begin{aligned} (\sigma_A^{-1}\left[\widetilde{ad}(x)\right]) \circ d_{A/K} &= \widetilde{ad}(x) \\ \left[(\sigma_A^{-1} \circ \widetilde{ad})(x)\right] \circ d_{A/K} &= \widetilde{ad}(x). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $a \in A$, on a

$$\begin{aligned} \left[\widetilde{ad}(x)\right](a) &= \left[(\sigma_A^{-1} \circ \widetilde{ad})(x)\right](d_{A/K}(a)) \\ &= -\omega(x, d_{A/K}(a)). \end{aligned}$$

D'où l'assertion. ■

Proposition 24 *Si A est une algèbre de Poisson de 2-forme de Poisson ω, alors pour x et y dans $\Omega_K(A)$ et pour $a \in A$, on a*

$$\left[\widetilde{\widetilde{ad}(x)}\right](y) = -\omega(x, y)\ ;$$

$$\mathfrak{L}_{\widetilde{ad}\left[d_{A/K}(a)\right]} d_{A/K}(b) = d_{A/K}\{a, b\}.$$

Démonstration: Lorsque $y = \sum_{i \in I:fini} a_i \cdot d_{A/K}(b_i)$, on a

$$\begin{aligned}
\left[\widetilde{\widetilde{ad}(x)}\right](y) &= \sum_{i \in I:fini} a_i \cdot \left[\widetilde{\widetilde{ad}(x)}\right](d_{A/K}(b_i)) \\
&= \sum_{i \in I:fini} a_i \cdot (\left[\widetilde{\widetilde{ad}(x)}\right] \circ d_{A/K})(b_i) \\
&= \sum_{i \in I:fini} a_i \cdot \left[\widetilde{ad}(x)\right](b_i) \\
&= -\sum_{i \in I:fini} a_i \cdot \omega(x, d_{A/K}(b_i)) \\
&= -\omega(x, \sum_{i \in I:fini} a_i \cdot d_{A/K}(b_i)) \\
&= -\omega(x, y).
\end{aligned}$$

Comme pour $\varphi \in Der_K(A)$, on a

$$\mathfrak{L}_{\varphi}\left[d_{A/K}(a)\right] = d_{A/K}\left[\varphi(a)\right],$$

on déduit que

$$\mathfrak{L}_{\widetilde{ad}\left[d_{A/K}(a)\right]} d_{A/K}(b) = d_{A/K}\{a, b\}.$$

D'où l'assertion. ■

1.4 Structure de K-algèbre de Lie sur le A-module $\Omega_K(A)$ lorsque A est une algèbre de Poisson

On va, dans ce qui suit, construire une structure de K-algèbre de Lie sur le A-module $\Omega_K(A)$ lorsque A est une algèbre de Poisson.

Théorème 25 *Si A est une algèbre de Poisson de 2-forme de Poisson ω, alors l'application*

$$\begin{aligned}
[\ ,\ ] : \Omega_K(A) \times \Omega_K(A) &\longrightarrow \Omega_K(A), \\
(x, y) \longmapsto [x, y] &= d_{A/K}\left[\omega(x, y)\right] + \mathfrak{L}_{\widetilde{ad}\ (x)} y - \mathfrak{L}_{\widetilde{ad}\ (y)} x
\end{aligned}$$

définit une structure de K-algèbre de Lie sur $\Omega_K(A)$. De plus

i) pour x et y dans $\Omega_K(A)$ et pour $a \in A$, on a

$$[x, a \cdot y] = \widetilde{ad}(x)(a) \cdot y + a \cdot [x, y] \ ;$$

ii) les applications

$$\begin{aligned}
d_{A/K} : A &\longrightarrow \Omega_K(A), \\
\widetilde{ad} : \Omega_K(A) &\longrightarrow Der_K(A),
\end{aligned}$$

sont des homomorphismes de K-algèbres de Lie.

L'application $[\ ,]$ est manifestement K-bilinéaire alternée. Pour la démonstration du théorème, on va utiliser les propositions suivantes :

Proposition 26 *Si A est une algèbre de Jacobi de 2-forme de Jacobi ω, alors pour tous a et b dans A, on a*

$$\left[d_{A/K}(a), d_{A/K}(b)\right] = d_{A/K}\left\{a,b\right\}.$$

Démonstration: Compte tenu de la définition de l'application $[\ ,]$,

$$\begin{aligned}
&\left[d_{A/K}(a), d_{A/K}(b)\right] \\
&= d_{A/K}\left[\omega(d_{A/K}(a), d_{A/K}(b))\right] + \mathfrak{L}_{\widetilde{ad}\left[d_{A/K}(a)\right]} d_{A/K}(b) - \mathfrak{L}_{\widetilde{ad}\left[d_{A/K}(b)\right]} d_{A/K}(a) \\
&= -d_{A/K}\left\{a,b\right\} + d_{A/K}(\widetilde{ad}\left[d_{A/K}(a)\right])(b) - d_{A/K}(\widetilde{ad}\left[d_{A/K}(b)\right])(a) \\
&= -d_{A/K}\left\{a,b\right\} + d_{A/K}\left[ad(a)\right](b) - d_{A/K}\left[ad(b)\right](a) \\
&= -d_{A/K}\left\{a,b\right\} + d_{A/K}\left\{a,b\right\} - d_{A/K}\left\{b,a\right\} \\
&= -d_{A/K}\left\{a,b\right\} + d_{A/K}\left\{a,b\right\} + d_{A/K}\left\{a,b\right\} \\
&= d_{A/K}\left\{a,b\right\}.
\end{aligned}$$

D'où l'assertion. ■

Proposition 27 *Si A est une algèbre de Poisson de 2-forme de Poisson ω, alors pour x, y et z dans $\Omega_K(A)$ et pour $a \in A$, on a*

$$[x, ay] = \widetilde{ad}(x)(a) \cdot y + a \cdot [x,y],$$

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

Démonstration: On a

$$\begin{aligned}
[x, ay] &= d_{A/K}\left[\omega(x, ay)\right] + \mathfrak{L}_{\widetilde{ad}\ (x)}(a \cdot y) - \mathfrak{L}_{\widetilde{ad}\ (a \cdot y)} x \\
&= d_{A/K}\left[\omega(x, ay)\right] + \widetilde{ad}(x)(a) \cdot y + a \cdot \mathfrak{L}_{\widetilde{ad}\ (x)}(y) \\
&- a \cdot \mathfrak{L}_{\widetilde{ad}\ (y)} x - \left[\widetilde{\widetilde{ad}(y)}\right](x) \cdot d_{A/K}(a) \\
&= d_{A/K}\left[a \cdot \omega(x,y)\right] + \widetilde{ad}(x)(a) \cdot y + a \cdot \mathfrak{L}_{\widetilde{ad}\ (x)}(y) \\
&- a \cdot \mathfrak{L}_{\widetilde{ad}\ (y)} x + \omega(y,x) \cdot d_{A/K}(a) \\
&= \omega(x,y) \cdot d_{A/K}(a) + a \cdot d_{A/K}\left[\omega(x,y)\right] - a \cdot \omega(x,y) \\
&+ \widetilde{ad}(x)(a) \cdot y + a \cdot \mathfrak{L}_{\widetilde{ad}\ (x)}(y) \\
&- a \cdot \mathfrak{L}_{\widetilde{ad}\ (y)} x - \omega(x,y) \cdot d_{A/K}(a) \\
&= \widetilde{ad}(x)(a) \cdot y + a \cdot d_{A/K}\left[\omega(x,y)\right] + a \cdot \mathfrak{L}_{\widetilde{ad}\ (x)}(y) \\
&- a \cdot \mathfrak{L}_{\widetilde{ad}\ (y)} x \\
&= \widetilde{ad}(x)(a) \cdot y + a \cdot [x,y].
\end{aligned}$$

On vérifie que
$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$$
pour tous x, y et z dans $\Omega_K(A)$. ■

Lorsque A est une algèbre de Poisson de 2-forme de Poisson ω, la structure de K-algèbre de Lie sur $\Omega_K(A)$ que l'on considérera, par la suite, sera toujours celle définie ci-dessus.

Proposition 28 *Si A est une algèbre de Poisson de 2-forme de Poisson ω, alors*
$$d_{\widetilde{ad}}\omega = 0.$$

Démonstration: Comme $d_{\widetilde{ad}}\omega$ est A-trilinéaire, il suffit de vérifier que $(d_{\widetilde{ad}}\omega)(d_{A/K}(a), d_{A/K}(a), d_{A/K}(a)) = 0$ pour tous a, b, c dans A.On a

$$\begin{aligned}
& (d_{\widetilde{ad}}\omega)(d_{A/K}(a), d_{A/K}(b), d_{A/K}(c)) \\
= \;& (\widetilde{ad}\left[d_{A/K}(a)\right])(\omega(d_{A/K}(b), d_{A/K}(c)) - (\widetilde{ad}\left[d_{A/K}(b)\right])(\omega(d_{A/K}(a), d_{A/K}(c)) \\
& +(\widetilde{ad}\left[d_{A/K}(c)\right])(\omega(d_{A/K}(a), d_{A/K}(b)) - \omega(\left[d_{A/K}(a), d_{A/K}(b)\right], d_{A/K}(c)) \\
& +\omega(\left[d_{A/K}(a), d_{A/K}(c)\right], d_{A/K}(b)) - \omega(\left[d_{A/K}(b), d_{A/K}(c)\right], d_{A/K}(a)) \\
= \;& -\{a,\{b,c\}\} + \{b,\{a,c\}\} - \{c,\{a,b\}\} + \{\{a,b\},c\} - \{\{a,c\},b\} + \{\{b,c\},a\} \\
= \;& -2(\{a,\{b,c\}\} + \{b,\{c,a\}\} + \{c,\{a,b\}\}) \\
= \;& 0.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 29 *Si A est une algèbre de Poisson de 2-forme de Poisson ω, alors le triplet $(\Omega_K(A), \widetilde{ad}, \omega)$ est une algèbre de Lie-Rinehart-Poisson.*

On va, par la suite, montrer que les algèbres de Poisson peuvent être caractérisées uniquement en termes d'algèbres de Lie-Rinehart-Poisson.

Proposition 30 *Lorsque A est une algèbre commutative unitaire sur un corps commutatif K, si ω_0 est une 2-forme alternée sur le A-module $\Omega_K(A)$, alors pour tout $x \in \Omega_K(A)$, l'application*
$$\rho_{\omega_0}(x) : A \longrightarrow A, a \longmapsto -\omega_0(x, d_{A/K}(a)),$$
est une dérivation et l'application
$$\rho_{\omega_0} : \Omega_K(A) \longrightarrow Der_K(A), x \longmapsto \rho_{\omega_0}(x),$$
est A-linéaire.

Démonstration: Pour tout $x \in \Omega_K(A)$, $\rho_{\omega_0}(x)$ est K-linéaire et pour $a, b \in A$, on a
$$\begin{aligned}
\left[\rho_{\omega_0}(x)\right](ab) &= -\omega_0(x, d_{A/K}(ab)) \\
&= -\omega_0(x, d_{A/K}(a)\cdot b) - \omega_0(x, a\cdot d_{A/K}(b)) \\
&= \left[\rho_{\omega_0}(x)\right](a)\cdot b + a\cdot\left[\rho_{\omega_0}(x)\right](b)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left[\rho_{\omega_0}(a\cdot x)\right](b) &= -\omega_0(a\cdot x, d_{A/K}(b)) \\ &= a\cdot -\omega_0(x, d_{A/K}(b)) \\ &= a\cdot\left[\rho_{\omega_0}(x)\right](b).\end{aligned}$$

D'où

$$\rho_{\omega_0}(a\cdot x) = a\cdot\rho_{\omega_0}(x).$$

■

Théorème 31 *Lorsque A est une algèbre commutative unitaire sur un corps commutatif K de caractéristique nulle, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) A est une algèbre de Poisson ;

ii) Il existe une structure de K-algèbre de Lie $[,]$ sur $\Omega_K(A)$ et une 2-forme alternée

$$\omega_0 : \Omega_K(A)\times\Omega_K(A)\longrightarrow A$$

telles que le triplet $(\Omega_K(A), \rho_{\omega_0}, \omega_0)$ soit une algèbre de Lie-Rinehart-Poisson.

Démonstration: Lorsque A est une algèbre de Poisson de 2-forme Poisson ω, on a $\widetilde{ad} = \rho_\omega$. Et le triplet $(\Omega_K(A), \widetilde{ad}, \omega)$ est une algèbre de Lie-Rinehart-Poisson.

Inversement supposons qu'il existe une structure de K-algèbre de Lie $[,]$ sur $\Omega_K(A)$ et une 2-forme alternée $\omega_0 : \Omega_K(A)\times\Omega_K(A)\longrightarrow A$ telles que le triplet $(\Omega_K(A), \rho_{\omega_0}, \omega_0)$ soit une algèbre de Lie-Rinehart-Poisson. En imposant à ρ_{ω_0} d'être un homomorphisme de K-algèbres de Lie, pour x et y dans $\Omega_K(A)$, et pour tout $c\in A$, on a

$$\begin{aligned}&\omega_0([x,y], d_{A/K}(c)) \\ = &-\omega_0(x, d_{A/K}\left[\omega_0(y, d_{A/K}(c)\right]) \\ &+\omega_0(y, d_{A/K}\left[\omega_0(x, d_{A/K}(c)\right])\end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned}(\rho_{\omega_0}[x,y])(c) &= (\left[\rho_{\omega_0}(x), \rho_{\omega_0}(y)\right])(c) \\ -\omega_0([x,y], d_{A/K}(c)) &= \rho_{\omega_0}(x)\left[\rho_{\omega_0}(y)(c)\right] \\ &\quad -\rho_{\omega_0}(y)\left[\rho_{\omega_0}(x)(c)\right] \\ &= -\rho_{\omega_0}(x)\left[\omega_0(y, d_{A/K}(c))\right] \\ &\quad +\rho_{\omega_0}(y)\left[\omega_0(x, d_{A/K}(c))\right] \\ &= \omega_0(x, d_{A/K}\left[\omega_0(y, d_{A/K}(c)\right]) \\ &\quad -\omega_0(y, d_{A/K}\left[\omega_0(x, d_{A/K}(c)\right])\end{aligned}$$

Pour a et b appartenant à A, en posant

$$\{a,b\} = -\omega_0(d_{A/K}(a), d_{A/K}(b)),$$

on obtient

$$\begin{array}{rl} & \omega_0(\left[d_{A/K}(a), d_{A/K}(b)\right], d_{A/K}(c)) \\ = & -\omega_0(d_{A/K}(a), d_{A/K}\left[\omega_0(d_{A/K}(b), d_{A/K}(c)\right]) \\ & +\omega_0(d_{A/K}(b), d_{A/K}\left[\omega_0(d_{A/K}(a), d_{A/K}(c)\right]) \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\begin{array}{rl} & \omega_0(\left[d_{A/K}(a), d_{A/K}(b)\right], d_{A/K}(c)) \\ = & -\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{a, c\}\}. \end{array}$$

Comme $d_{\rho_{\omega_0}}\omega_0 = 0$, pour tous a,b et c appartenant à A, on a

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & (d_{\rho_{\omega_0}}\omega_0)(d_{A/K}(a), d_{A/K}(b), d_{A/K}(c)) \\ & = & \rho_{\omega_0}(d_{A/K}(a))\left[\omega_0(d_{A/K}(b), d_{A/K}(c))\right] \\ & & -\rho_{\omega_0}(d_{A/K}(b))\left[\omega_0(d_{A/K}(a), d_{A/K}(c))\right] \\ & & +\rho_{\omega_0}(d_{A/K}(c))\left[\omega_0(d_{A/K}(a), d_{A/K}(b))\right] \\ & & -\omega_0(\left[d_{A/K}(a), d_{A/K}(b)\right], d_{A/K}(c)) \\ & & +\omega_0(\left[d_{A/K}(a), d_{A/K}(c)\right], d_{A/K}(b)) \\ & & -\omega_0(\left[d_{A/K}(b), d_{A/K}(c)\right], d_{A/K}(a)). \end{array}$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & (d_{\rho_{\omega_0}}\omega_0)(d_{A/K}(a), d_{A/K}(b), d_{A/K}(c)) \\ & = & -\omega_0(d_{A/K}(a), d_{A/K}\left[\omega_0(d_{A/K}(b), d_{A/K}(c))\right]) \\ & & +\omega_0(d_{A/K}(b), d_{A/K}\left[\omega_0(d_{A/K}(a), d_{A/K}(c))\right]) \\ & & -\omega_0(d_{A/K}(c), d_{A/K}\left[\omega_0(d_{A/K}(a), d_{A/K}(b))\right]) \\ & & -\omega_0(\left[d_{A/K}(a), d_{A/K}(b)\right], d_{A/K}(c)) \\ & & +\omega_0(\left[d_{A/K}(a), d_{A/K}(c)\right], d_{A/K}(b)) \\ & & -\omega_0(\left[d_{A/K}(b), d_{A/K}(c)\right], d_{A/K}(a)). \end{array}$$

D'où

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & (d_{\rho_{\omega_0}}\omega_0)(d_{A/K}(a), d_{A/K}(b), d_{A/K}(c)) \\ & = & -\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{a, c\}\} - \{c, \{a, b\}\} \\ & & +\{a, \{b, c\}\} - \{b, \{a, c\}\} - \{a, \{c, b\}\} \\ & & +\{c, \{a, b\}\} + \{b, \{c, a\}\} - \{c, \{b, a\}\} \\ & = & -\{a, \{c, b\}\} + \{b, \{c, a\}\} - \{c, \{b, a\}\} \\ & = & -\{\{a, b\}, c\} - \{\{b, c\}, a\} - \{\{c, a\}, b\} \end{array}$$

On conclut que

$$\{\{a, b\}, c\} + \{\{b, c\}, a\} + \{\{c, a\}, b\} = 0.$$

Ainsi A est une algèbre de Lie.

Le fait que $d_{A/K} : A \longrightarrow \Omega_K(A)$ est une dérivation implique que

$$\{a, b \cdot c\} = \{a, b\} \cdot c + b \cdot \{a, c\}$$

pour tous a,b et c appartenant à A.

L'algèbre A est ainsi une algèbre de Poisson. ■

Proposition 32 *Si A est une algèbre de Poisson de 2-forme de Poisson ω, alors la 2-forme de Poisson ω est nondégénérée si et seulement si l'application*

$$\widetilde{ad} : \Omega_K(A) \longrightarrow Der_K(A)$$

est un isomorphisme de A-modules.

La démonstration ne présente aucune difficulté.

Corollaire 33 *Une condition suffisante pour qu'une variété de Poisson V soit une variété symplectique est que la 2-forme de Poisson de l'algèbre de Poisson $C^\infty(V)$ soit nondégénérée.*

2 Algèbres de Lie-Rinehart-Poisson symplectiques

On rappelle qu'une algèbre de Lie-Rinehart-Poisson $(\mathcal{G}, \rho, \eta)$ est dite algèbre de Lie-Rinehart-Poisson symplectique si

$$\eta : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow A$$

est nondégénérée.

Pour $a \in A$, lorsque $(\mathcal{G}, \rho, \eta)$ est une algèbre de Lie-Rinehart-Poisson symplectique, on note x_a l'unique élément de $\mathcal{G}$ tel que

$$i_{x_a}\eta = d_\rho a.$$

On va montrer, par la suite, que la donnée d'une algèbre de Lie-Rinehart-Poisson symplectique $(\mathcal{G}, \rho, \eta)$ permet de construire une structure d'algèbre de Poisson sur A.

Dans tout ce qui suit $(\mathcal{G}, \rho, \eta)$ est une algèbre de Lie-Rinehart-Poisson symplectique.

Proposition 34 *Pour $a \in A$, alors*

$$\theta_{x_a}\eta = 0.$$

Démonstration: On a

$$\theta_{x_a}\eta = i_{x_a}d_\rho\eta - d_\rho i_{x_a}\eta.$$

Comme $d_\rho\eta = 0$ et $i_{x_a}\eta = d_\rho a$, on conlut que $\theta_{x_a}\eta = 0$. ■

Pour a et b dans A, on pose

$$\{a, b\} = -\eta(x_a, x_b).$$

Théorème 35 *Si* $(\mathcal{G}, \rho, \eta)$ *est une algèbre de Lie-Rinehart-Poisson symplectique, alors*

1/ $\{a, b\} = [\rho(x_a)](b)$
2/ $[x_a, x_b] = x_{\{a,b\}}$
3/ $\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{c, a\}\} + \{c, \{a, b\}\} = 0$
4/ $\{a, b \cdot c\} = \{a, b\} \cdot c + b \cdot \{a, c\}$.

Démonstration: 1/ On écrit

$$\begin{aligned} \{a, b\} &= -\eta(x_a, x_b) \\ &= (i_{x_b}\eta)(x_a) \\ &= (d_\rho b)(x_a) \\ &= [\rho(x_a)](b). \end{aligned}$$

2/

$$\begin{aligned} \theta_{[x_a, x_b]}\eta &= [\theta_{x_a}, i_{x_b}]\,\eta \\ &= \theta_{x_a}(i_{x_b}\eta) - i_{x_b}(\theta_{x_a}\eta) \\ &= \theta_{x_a}(d_\rho b) - 0 \\ &= d_\rho(\theta_{x_a} b) \\ &= d_\rho([\rho(x_a)](b)) \\ &= d_\rho\{a, b\} \\ &= i_{x_{\{a,b\}}}\eta. \end{aligned}$$

On déduit que $[x_a, x_b] = x_{\{a,b\}}$.
3/ Comme $d_\rho\eta = 0$, pour a, b et c dans A, on a

$$\begin{aligned} 0 &= (d_\rho\eta)(x_a, x_b, x_c) \\ &= [\rho(x_a)](\eta(x_b, x_c)) - [\rho(x_b)](\eta(x_a, x_c)) + [\rho(x_c)](\eta(x_a, x_b)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \eta([x_a, x_b], x_c) + \eta([x_a, x_c], x_b) - \eta([x_b, x_c], x_a) \\ &= -[\rho(x_a)](\{b, c\}) + [\rho(x_b)](\{a, c\}) - [\rho(x_c)](\{a, b\}) \\ &- \eta(x_{\{a,b\}}, x_c) + \eta(x_{\{a,c\}}, x_b) - \eta(x_{\{b,c\}}, x_a) \\ &= -\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{a, c\}\} - \{c, \{a, b\}\} + \{\{a, b\}, c\} - \{\{a, c\}, b\} + \{\{b, c\}, a\} \\ &= -\{a, \{b, c\}\} - \{b, \{c, a\}\} - \{c, \{a, b\}\} - \{c, \{a, b\}\} - \{b, \{c, a\}\} - \{a, \{b, c\}\} \\ &= -2\,[\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{c, a\}\} + \{c, \{a, b\}\}]. \end{aligned}$$

Comme K est de caractéristique différente de 2, on déduit que $\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{c, a\}\} + \{c, \{a, b\}\} = 0$. ■

Corollaire 36 *Si* $(\mathcal{G}, \rho, \eta)$ *est une algèbre de Lie-Rinehart-Poisson symplectique, alors* A *est une algèbre de Poisson.*

3 Cohomologie d'une algèbre de Poisson

Definition 37 *Pour tout entier $p \geq 1$, une application K-multilinéaire alternée*

$$\varphi : A^p = A \times A \times ... \times A \longrightarrow M$$

est une p-dérivation de A dans un A-module M si pour tous $a_1, a_2, ..., a_p$ dans A, l'application

$$A \longrightarrow M, a_i \longmapsto \varphi(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_p)$$

est une dérivation $i = 1, 2, ..., p$.

L'ensemble $Der_K^p(A, M)$ des p-dérivations de A dans M est un A-module. En notant :

$$d_{A/K}^{(p)} = d_{A/K} \times d_{A/K} \times ... \times d_{A/K} : A^p \longrightarrow [\Omega_K(A)]^p\,,$$

$$(a_1, a_2, ..., a_p) \longmapsto d_{A/K}(a_1) \times d_{A/K}(a_2) \times ... \times d_{A/K}(a_p)$$

et $\mathfrak{L}_{alt}^p(\Omega_K(A), M)$ le A-module des applications A-multilinéaires alternées de degré p de $\Omega_K(A)$ dans M.

Proposition 38 *Pour tout A-module M et pour toute p-dérivation φ de A dans M, il existe une application A-multilinéaire alternée de degré p et une seule*

$$\widetilde{\varphi}\ : [\Omega_K(A)]^p \longrightarrow M$$

telle que

$$\widetilde{\varphi}\ \circ d_{A/K}^{(p)} = \varphi$$

L'application

$$\mathfrak{L}_{alt}^p(\Omega_K(A), M) \longrightarrow Der_K^p(A, M), f \longmapsto f \circ d_{A/K}^{(p)},$$

est un isomorphisme de A-modules.

Démonstration: Comme $\varphi : A^p \longrightarrow M$ est une p-dérivation de A dans M et comme

$$\varphi^i : A \longrightarrow M, a_i \longmapsto \varphi^i(a_i) = \varphi(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_p)$$

est une dérivation pour tout $i = 1, 2, ..., p$, alors il existe une application A-linéaire et une seule

$$\widetilde{\varphi^i} : \Omega_K(A) \longrightarrow M$$

telle que

$$\widetilde{\varphi^i}\left[d_{A/K}(a_i)\right] = \varphi(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_p).$$

On déduit l'existence et l'unicité de l'application A-multilinéaire $\widetilde{\varphi} : [\Omega_K(A)]^p \longrightarrow M$ telle que $\widetilde{\varphi} \circ d_{A/K}^{(p)} = \varphi$. On vérifie que $\widetilde{\varphi}$ est alternée. Comme l'application

$$\mathfrak{L}_{alt}^p(\Omega_K(A), M) \longrightarrow Der_K^p(A, M), f \longmapsto f \circ d_{A/K}^{(p)},$$

est A-linéaire, on déduit que c'est un isomorphisme de A-modules. ■

Definition 39 *Lorsque A est une algèbre de Poisson, le complexe différentiel $(\mathfrak{L}_{alt}(\Omega_K(A), A), d_{\widetilde{ad}})$ est appelé complexe de Poisson de l'algèbre de Poisson et on note, $H_{\widetilde{ad}}[\Omega_K(A), A]$, la cohomologie de la K-algèbre de Lie $\Omega_K(A)$ à valeurs dans la représentation $\widetilde{ad}$. On dit que $H_{\widetilde{ad}}[\Omega_K(A), A]$ est la cohomologie de l'algèbre de Poisson A.*

Lorsque A est une algèbre de Poisson de crochet de Poisson $\{,\}$, on note, δ, la différentielle du complexe différentiel de l'algèbre de Lie $(A, \{,\})$ à valeurs dans la représentation adjointe.

Proposition 40 *Pour $p \geq 1, p$ entier et pour $f \in \mathfrak{L}^p_{alt}(\Omega_K(A), A)$, alors*

$$\delta\left[f \circ d^{(p)}_{A/K}\right] = \left[d_{\widetilde{ad}} f\right] \circ d^{(p+1)}_{A/K}.$$

Démonstration: Pour $a_1, a_2, ..., a_{p+1}$dans A, on a

$$\begin{aligned}
&(\delta\left[f \circ d^{(p)}_{A/K}\right])(a_1, a_2, ..., a_{p+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}\left\{a_i, (f \circ d^{(p)}_{A/K})(a_1, a_2, ..., \widehat{a_i}, ..., a_{p+1}\right\}) \\
&+ \sum_{1\leq i<j\leq p+1}(-1)^{i+j}(f \circ d^{(p)}_{A/K})(\{a_i, a_j\}, a_1, a_2, ..., \widehat{a_i}, ..., \widehat{a_j}, ..., a_{p+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}\left\{a_i, f\left[d_{A/K}(a_1), d_{A/K}(a_2), ..., \widehat{d_{A/K}(a_i)}, ..., d_{A/K}(a_{p+1})\right]\right\}) \\
&+ \sum_{1\leq i<j\leq p+1}(-1)^{i+j} f(\left[d_{A/K}(a_i), d_{A/K}(a_j)\right], d_{A/K}(a_1), ..., \widehat{d_{A/K}(a_i)}, ..., \widehat{d_{A/K}(a_j)}, ..., d_{A/K}(a_{p+1}))
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&(\delta\left[f \circ d^{(p)}_{A/K}\right])(a_1, a_2, ..., a_{p+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}\,\widetilde{ad}\left[\widehat{d_{A/K}(a_i)}\right] f(d_{A/K}(a_1), d_{A/K}(a_2), ..., \widehat{d_{A/K}(a_i)}, ..., d_{A/K}(a_{p+1})) \\
&+ \sum_{1\leq i<j\leq p+1}(-1)^{i+j} f(\left[d_{A/K}(a_i), d_{A/K}(a_j)\right], d_{A/K}(a_1), ..., \widehat{d_{A/K}(a_i)}, ..., \widehat{d_{A/K}(a_j)}, ..., d_{A/K}(a_{p+1})) \\
&= (\left[d_{\widetilde{ad}} f\right] \circ d^{(p+1)}_{A/K})(a_1, a_2, ..., a_{p+1}).
\end{aligned}$$

D'où l'assertion. ■

Théorème 41 *Si A est une algèbre de Poisson de 2-forme de Poisson ω, alors*

α) $H^0_{\widetilde{ad}}[\Omega_K(A), A]$ s'identifie au centre de l'algèbre de Lie $(A, \{,\})$;

β) Le K-espace $H^1_{\widetilde{ad}}[\Omega_K(A), A]$ s'identifie canoniquement au quotient de l'intersection du K-espace des dérivations de l'algèbre commutative A avec le

K-espace des dérivations de l'algèbre de Lie $(A, \{\ ,\})$ par le K-espace des dérivations intérieures de l'algèbre de Lie $(A, \{\ ,\})$;

γ) En général, pour $p \geq 1$ (p entier), si $Z^p(A, \{,\})$ est le K-espace des p-cocycles de l'algèbre de Lie $(A, \{,\})$ pour la cohomologie de Chevalley à valeurs dans la représentation adjointe et si $\delta[Der_K^{p-1}(A, A)]$ est le K-sous-espace des p-cobords constitué de l'image de $Der_K^{p-1}(A, A)$ par δ, alors le K-espace $H^p_{\widetilde{ad}}[\Omega_K(A), A]$ s'identifie canoniquement au K-espace quotient

$$[Der_K^p(A, A) \cap Z^p(A, \{\ ,\}] \,/ \left[Der_K^p(A, A) \cap \delta[Der_{alt}^{p-1}(A, A)]\right]$$

Démonstration: Pour la dernière assertion, si $Z^p\left[\Omega_K(A)\right]$ et $B^p\left[\Omega_K(A)\right]$ sont respectivement le K-espace des p-cocycles et le K-espace des p-cobords pour la cohomologie de Poisson, l'isomorphisme

$$\tau_p : \mathfrak{L}^p_{alt}(\left[\Omega_K(A)\right], A) \longrightarrow Der_K^p(A, A), \tau_p : f \longmapsto f \circ d^{(p)}_{A/K}$$

est tel que

$$\tau_p\left(Z^p\left[\Omega_K(A)\right]\right) = [Der_K^p(A, A) \cap Z^p(A, \{,\}]$$

et

$$\tau_p\left(B^p\left[\Omega_K(A)\right]\right) = \left[Der_K^p(A, A) \cap \delta[Der_K^{p-1}(A, A)]\right]$$

Ce qui induit un isomorphisme du K-espace $H^p_{\widetilde{ad}}[\Omega_K(A), A]$ sur le K-espace

$$[Der_K^p(A, A) \cap Z^p(A, \{,\}] \,/ Der_K^p(A, A) \cap \delta[Der_K^{p-1}(A, A)].$$

D'où le théorème. ■

Références

[1] BOURBAKI N., Algèbre, chapitres 1 à 3, Hermann, Paris 1970

[2] GODBILLON C., Géométrie différentielle et Mécanique analytique, Collections Méthodes, Hermann, Paris 1969

[3] HUEBSCHMANN J., Poisson cohomology and quantization, J. für die reine angew. Math. 408 (1990), 57–113

[4] LICHNEROWICZ A., Sur les algèbres de Lie locales de Kirillov-Schiga, C. R. Acad. Sci. Paris, t.296, Série I (1983), 915–920

[5] LICHNEROWICZ A., Dérivations d'algèbres de Lie attachées à une algèbre de Lie locale de Kirillov, C. R. Acad. Sci. Paris, t.297, Série I (1983), 261–266

[6] OKASSA E., Algèbres de Jacobi et Algèbres de Lie-Rinehart-Jacobi, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol.208, n° 3, (2007), 1071-1089.

[7] OKASSA E, On Lie-Rinehart-Jacobi algebras, Journal of Algebra and its Applications, Vol.7, N°6 (2008),749-772

[8] RINEHART G., Differential forms for general commutative algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 195-222

[9] VAISMAN I., Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds, Progress in Math. 118, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994