Position relative de deux courbes

Soit $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives, dans un repère du plan, de deux fonctions f et g sur un intervalle I.

Etudier la postition relative de deux courbes, c'est préciser laquelle est au dessous ou au dessus de l'autre, et en quels points elles se croisent.

Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur I, il suffit de comparer les fonctions f et g en étudiant le signe de $f(x) - g(x)$.

- si $f(x) - g(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors $\mathcal{C}_f$ est strictement au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur I.
- si $f(x) - g(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors $\mathcal{C}_f$ est strictement au dessous de $\mathcal{C}_g$ sur I.
- les solutions de l'équation $f(x) - g(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

Exemple : étudier la position relative des fonctions f et g telles que $f(x) = x^3 - 1$ et $g(x) = 4x^2 - 1$.

$f(x) - g(x) = x^3 - 1 - 4x^2 + 1 = x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$.

Etudions alors le signe de cette différence : pour tout réel x, $x^2 \geq 0$ donc $f(x) - g(x)$ est du signe de $x - 1$ c'est à dire : $\begin{cases} f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \\ f(x) - g(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1 \\ f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} f(x) > g(x) \Leftrightarrow x > 1 \\ f(x) < g(x) \Leftrightarrow x < 1 \\ f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$ On peut donc en conclure que la courbe de f est strictement au dessus de la courbe de g sur $]1; +\infty[$, strictement au-dessous sur $]-\infty; 1[$ et les deux courbes se coupent au point d'abscisse 1.