

1) On veut vérifier que $\sqrt[p]{\int_{-\infty}^{+\infty} |g_\alpha(t)|^p dt} < +\infty$

$$\text{Soit : } M = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{\frac{-t^2}{2\alpha^2}} \right|^p dt = \frac{2}{(\sqrt{2\pi\alpha})^p} \int_0^{+\infty} e^{\frac{-pt^2}{2\alpha^2}} dt = \frac{2}{(\sqrt{2\pi\alpha})^p} * I$$

$$\text{On calcul I : } I^2 = \int_0^{+\infty} e^{\frac{-px^2}{2\alpha^2}} dy * \int_0^{+\infty} e^{\frac{-py^2}{2\alpha^2}} dx = \iint_0^{+\infty} e^{\frac{-px^2}{2\alpha^2}} * e^{\frac{-py^2}{2\alpha^2}} dy dx = \iint_0^{+\infty} e^{\frac{-p(x^2+y^2)}{2\alpha^2}} dy dx$$

On remplace par les coordonnées polaires : $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $dx dy = \rho d\rho d\phi$ avec $0 \leq \rho < +\infty$ et $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$

$$I^2 = \iint_0^{+\infty} \rho e^{\frac{-p\rho^2}{2\alpha^2}} d\phi d\rho = \frac{\pi}{2} * \frac{-\alpha^2}{p} * \int_0^{+\infty} \frac{-p}{\alpha^2} \rho e^{\frac{-p\rho^2}{2\alpha^2}} d\rho = \frac{\pi\alpha^2}{2p} \text{ alors } I = \sqrt{\frac{\pi\alpha^2}{2p}}$$

$$M = \frac{2}{(\sqrt{2\pi\alpha})^p} * I = \frac{2}{(\sqrt{2\pi\alpha})^p} * \sqrt{\frac{\pi\alpha^2}{2p}} = 2^{\frac{1-p}{2}} \alpha^{1-p} \pi^{\frac{1-p}{2}} p^{\frac{-1}{2}}$$

$$\text{Et donc } \sqrt[p]{\int_{-\infty}^{+\infty} |g_\alpha(t)|^p dt} = \sqrt[p]{M} = 2^{\frac{1-p}{2p}} \alpha^{\frac{1-p}{p}} \pi^{\frac{1-p}{2p}} p^{\frac{-1}{2p}}.$$

$$\text{Or } = 2^{\frac{1-p}{2p}} \alpha^{\frac{1-p}{p}} \pi^{\frac{1-p}{2p}} p^{\frac{-1}{2p}} < +\infty, \forall p \in \mathbb{N}^* ???$$

Donc g_α appartient à $L^p(\mathbb{R}, dt)$

$$2) \|g_\alpha\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g_\alpha(t)|^1 dt = 2^{\frac{1-1}{2*1}} \alpha^{\frac{1-1}{1}} \pi^{\frac{1-1}{2*1}} 1^{\frac{-1}{2*1}} = 1$$

$$3) \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} e^{\frac{-t^2}{2\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha^{-1} e^{\frac{-t^2}{2\alpha^2}}$$

Or $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} e^{\frac{-t^2}{2\alpha^2}} = 0$ et $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha^{-1} = +\infty$ mais par croissance

comparée : $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha^{-1} e^{\frac{-t^2}{2\alpha^2}} = 0$ donc $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g_\alpha = 0$???

On avait montré que $\|g_\alpha\|_1 = 1, \forall \alpha > 0$ donc

$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \|g_\alpha\|_1 = 1 \neq 0$???