DEVOIR MAISON 2

PARTIE A : une démonstration.

On souhaite calculer les termes de la suite (U_n) définie pour tout entier n non nul par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

1.
   a. Montrer que $U_1 = 1$.
   b. Expliquer pourquoi $U_2 = 5$
   c. Calculer les 3 termes suivants.
   d. (U_n) est-elle arithmétique ?

L'objectif des prochaines questions est de trouver une formule explicite pour cette suite (U_n)

2. Montrer que pour tout entier n non nul,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3] = (n+1)^3 - n^3$$

(on pourra utiliser le résultat suivant $\sum(a_k - b_k) = \sum a_k - \sum b_k$)

3.
   a. Montrer que pour tout entier k non nul, $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$
   b. En déduire que $S_n = 3U_n + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$
4. Déduire des questions 2 et 3 que

$$U_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5. Application : calculer U_{50}.

PARTIE B : étude d'une suite avec une suite auxiliaire.

L'étude de certaines suites nécessitent l'utilisation d'une suite auxiliaire dont on connait les propriétés.
On considère la suite (T_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} T_0 = 12 \\ T_{n+1} = T_n + 8n - 4 \end{cases}$$

1.
   a. Calculer les 5 premiers termes de (T_n)
   b. (T_n) est-elle arithmétique ?
2. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier n par $V_n = U_n - 4n^2$
   a. Calculer les 5 premiers termes de (V_n)
   b. Quelle semble être la nature de (V_n) ?
3.
   a. Déterminer, en justifiant, la nature de (V_n). On donnera le premier terme et la raison de cette suite.
   b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de V_n en fonction de n.
   c. Calculer

$$\sum_{k=0}^{15} V_k$$

4.
   a. Montrer que pour tout entier naturel n, $T_n = 12 - 8n + 4n^2$
   b. Calculer T_{10}.

PARTIE C : application

On considère la suite (T_n) définie dans la partie B.
En vous aidant des résultats précédents calculer

$$\sum_{k=0}^{15} T_k$$