Exercice 6 Nombre de surjections

r balles dans n boîtes

1 Déterminons la probabilité qu'aucune boîte ne soit vide

soit A_k « la k-ième boîte est vide »

On cherche $P(\overline{\cup A_i}) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} P(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j})$$

Déterminons $P(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j})$

$\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$: Il s'agit de l'évènement « les $i_1 \dots i_k$ boîtes sont vides »

L'univers ici est l'ensemble de tous les lancers possibles n^r

Et, faisant le choix des k boîtes vides C_n^k, on distribue $(n-k)$ balles dans les $n-k$ boîtes non vides $(n-k)!$, puis, on réalise une application de l'ensemble des $r-(n-k)$ balles restantes vers l'ensemble des $n-k$ boîtes soit $(n-k)^{r-(n-k)}$ app possibles.

D'où

$$P(\overline{\cup A_i}) = 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k (n-k)!\,(n-k)^{r-(n-k)}$$

Posons $p = (n-k)$, $\Rightarrow k = n-p$

$$P(\overline{\cup A_i}) = 1 - \sum_{p=n-1}^{0} (-1)^{n-p-1} C_n^{n-p}\, p!\,(p)^{r-p}$$

$$= 1 + \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{n-p} C_n^{p}\, p!\, p^{r-p}$$