ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2016 — FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – A – (XLCR)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Toute affirmation doit être clairement et complètement justifiée.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On appelle *point entier* de $\mathbb{R}^n$ un point dont toutes les coordonnées sont entières, c'est-à-dire un point de $\mathbb{Z}^n$. Si $\mathcal{K}$ est une partie de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathring{\mathcal{K}}$ son intérieur. On appelle points entiers de $\mathcal{K}$ (resp. points entiers intérieurs) les points de $\mathcal{K} \cap \mathbb{Z}^n$ (resp. les points de $\mathring{\mathcal{K}} \cap \mathbb{Z}^n$). On note respectivement $\mathrm{Card}(\mathcal{K} \cap \mathbb{Z}^n)$ et $\mathrm{Card}(\mathring{\mathcal{K}} \cap \mathbb{Z}^n)$, le nombre (éventuellement infini) de points entiers de $\mathcal{K}$ et de son intérieur $\mathring{\mathcal{K}}$.

Soit h_β l'homothétie de rapport $\beta \in \mathbb{R}$ (centrée en 0), on note $\beta\mathcal{K} = h_\beta(\mathcal{K})$ l'image de $\mathcal{K}$ par h_β. Si τ_x est la translation de vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{K} - x = \tau_{-x}(\mathcal{K})$ l'image de $\mathcal{K}$ par τ_{-x}.

Si $M = (m_{ij})$ est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, m_{ij} est le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne.
On note $(x_1|\cdots|x_n)$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les vecteurs $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$.
On note I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$ et E_{ij} la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1.
On note $M_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont entiers.

On note $\lfloor a \rfloor$ la partie entière d'un réel a : c'est le plus grand entier inférieur ou égal à a ; et $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor \in [0, 1[$ la partie fractionnaire de a. On note $\rfloor a \lfloor$ le plus grand entier strictement inférieur à a.
Pour des entiers $a_1, \ldots, a_k$ non tous nuls, on note $\mathrm{pgcd}(a_1, \ldots, a_k)$ le plus grand entier (strictement positif) qui divise tous les a_i.

Première partie

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et à coefficients entiers.

1a. Montrer que M^{-1} est à coefficients rationnels.

1b. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

i) M^{-1} est à coefficients entiers.

ii) $\det M$ vaut 1 ou -1.

Dans la suite, on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients entiers et de déterminant ± 1. C'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On remarque que pour $i \neq j$ et $c \in \mathbb{Z}$, la matrice $I_n + cE_{ij}$ appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

2. Soit $M = (x_1|\cdots|x_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

2a. Montrer que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $M(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$.

2b. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

i) $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

ii) Les points entiers du parallélépipède $\mathcal{P} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \mid \forall i \in \{1,\dots,n\},\ t_i \in [0,1] \right\}$ sont exactement les 2^n points $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i$, où $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$.

3. Pour tout α dans $\mathbb{R}$ et pour tous entiers i et j distincts compris entre 1 et n, décrire l'effet sur une matrice carrée M de taille n de la multiplication à gauche par $I_n + \alpha E_{ij}$. Même question pour la multiplication à droite.

4. Soient $n \geqslant 2$ et $a_1,\dots,a_n$ des entiers non tous nuls. Le but de cette question est de montrer qu'il existe une matrice de $M_n(\mathbb{Z})$ dont la première colonne est $(a_1,\dots,a_n)$ et de déterminant le $\mathrm{pgcd}(a_1,\dots,a_n)$. Pour cela on raisonne par récurrence sur n.

Soit $N \in M_{n-1}(\mathbb{Z})$ une matrice dont la première colonne est $(a_2,\dots,a_n)$. Étant donnés $u, v \in \mathbb{Q}$, on considère la matrice

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} a_1 & 0 & \cdots & 0 & u \\ \hline & & & & va_2 \\ & & N & & va_3 \\ & & & & \vdots \\ & & & & va_n \end{array}\right).$$

4a. Exprimer $\det M$ en fonction de $\det N$, u et v.

4b. On suppose que les $a_2,\dots,a_n$ sont non tous nuls et que $\det N = \mathrm{pgcd}(a_2,\dots,a_n)$. Montrer que l'on peut choisir u, v de sorte que M réponde à la question.

4c. Conclure la récurrence.

5. Soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$, de déterminant non nul. On souhaite montrer qu'il existe une matrice A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ telle que MA soit triangulaire supérieure et en notant $MA = (c_{ij})$, on ait les inégalités $0 < c_{11}$ et $0 \leqslant c_{ij} < c_{ii}$ pour tous $i, j \in \{1,\dots,n\}$ tels que $i < j$.

5a. On note $M = (x_1|\cdots|x_n)$. Soient $x'_1,\dots,x'_n$ les éléments de $\mathbb{Z}^{n-1}$ obtenus en prenant les $(n-1)$ dernières coordonnées de $x_1,\dots,x_n$.

Montrer qu'il existe $a_1,\dots,a_n$ dans $\mathbb{Q}$, non tous nuls, tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i\, x'_i = 0$. Montrer que l'on peut choisir les a_i entiers et premiers entre eux dans leur ensemble.

5b. Montrer qu'il existe une matrice A_1 dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ telle que la première colonne de $\tilde{C} = MA_1$ ait tout ses coefficients $\tilde{c}_{i1}$ nuls sauf le premier $\tilde{c}_{11}$ que l'on peut prendre strictement positif.

5c. En considérant pour tout $j = 2,\dots,n$ la division euclidienne $\tilde{c}_{1j} = q_j \tilde{c}_{11} + r_j$, $0 \leqslant r_j < \tilde{c}_{11}$, montrer que l'on peut supposer $\tilde{c}_{11} > \tilde{c}_{1j}$, quitte à changer A_1.

5d. Conclure par récurrence.

6. Soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$, de déterminant non nul. Montrer qu'il existe une matrice A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ telle que AM soit triangulaire inférieure et en notant $AM = (c_{ij})$, on ait l'inégalité $0 \leqslant c_{ij} < c_{jj}$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $j < i$.

Deuxième partie

Soient $s_0, s_1, \ldots, s_n$ des points de $\mathbb{R}^n$ tels que les vecteurs $s_1 - s_0, s_2 - s_0, \ldots, s_n - s_0$ soient linéairement indépendants. On appelle *simplexe de sommets* $s_0, s_1, \ldots, s_n$ l'ensemble :

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i s_i \mid \forall i = 0, \ldots, n,\ t_i \geqslant 0,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ s_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i (s_i - s_0) \mid \forall i = 1, \ldots, n,\ t_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} t_i \leqslant 1 \right\}.\end{aligned}$$

Si de plus les s_i sont tous des points entiers, on dit que $\mathcal{S}$ est un simplexe entier.
On définit le volume du simplexe $\mathcal{S}$ de sommets $s_0, s_1, \ldots, s_n$ par

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{S}) := \frac{1}{n!} |\det(s_1 - s_0, s_2 - s_0, \ldots, s_n - s_0)|.$$

7. Soit $\mathcal{S}$ le simplexe de sommets $s_0, s_1, \ldots, s_n$.

7a. Montrer $\mathcal{S}$ est un compact convexe de $\mathbb{R}^n$.

7b. Montrer que $\mathring{\mathcal{S}} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i s_i \mid \forall i = 0, \ldots, n,\ t_i > 0,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}$.
En déduire que si $0 \in \mathring{\mathcal{S}}$, alors, pour tout $\lambda \in [0, 1[$, $\lambda \mathcal{S} \subset \mathring{\mathcal{S}}$.

7c. Pour $i = 0, \ldots, n$, on note $\hat{s}_i = (1, s_i)$ le point de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont les coordonnées sont 1 suivi des coordonnées de s_i. Exprimer $|\det(\hat{s}_0, \hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_n)|$ en fonction de $\mathrm{Vol}(\mathcal{S})$.
En déduire que le volume d'un simplexe ne dépend pas de l'ordre des sommets.

8. Soit $V \geqslant 0$ un réel.

8a. Donner un exemple de simplexe entier de $\mathbb{R}^2$, de volume supérieur ou égal à V, et n'ayant aucun point intérieur entier.

8b. Donner un exemple de simplexe entier de $\mathbb{R}^3$, de volume supérieur ou égal à V, et dont les seuls points entiers sont les sommets.

9. Soit $\mathcal{K}$ un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in \mathring{\mathcal{K}}$.

9a. Montrer que l'ensemble des $\lambda \geqslant 0$ tels que $-\lambda\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ est un intervalle.
On note

$$a(\mathcal{K}) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda\mathcal{K} \subset \mathcal{K}\}.$$

9b. Montrer que $a(\mathcal{K}) < \infty$ et que $a(\mathcal{K}) = \max\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda\mathcal{K} \subset \mathcal{K}\}$.

9c. Montrer que $0 < a(\mathcal{K}) \leqslant 1$.
En déduire que $a(\mathcal{K}) = 1$ si et seulement si $\mathcal{K}$ est symétrique par rapport à 0.

On admet le résultat suivant que l'on pourra utiliser sans démonstration pour la suite de cette partie.

Théorème 1. *Soit $\mathcal{S}$ un simplexe de $\mathbb{R}^n$ et k un entier. Si $\mathrm{Vol}(\mathcal{S}) \geqslant k$, il existe $k+1$ points distincts $v_0, \ldots, v_k$ de $\mathcal{S}$ tels que $v_i - v_j \in \mathbb{Z}^n$ quels que soient i et j entre 0 et k.*

10. Dans toute cette question, $\mathcal{S}$ est un simplexe de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in \mathring{\mathcal{S}}$. On veut montrer que

$$\operatorname{Card}(\mathring{\mathcal{S}} \cap \mathbb{Z}^n) \geqslant 2 \left\rfloor \operatorname{Vol}(\mathcal{S}) \left(\frac{a(\mathcal{S})}{a(\mathcal{S})+1} \right)^n \right\lfloor + 1.$$

On pose alors $a = a(\mathcal{S})$, et $k = \left\rfloor \operatorname{Vol}(\mathcal{S}) \left(\dfrac{a}{a+1} \right)^n \right\lfloor$.

10a. Exprimer, pour $\beta \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{Vol}(\beta\mathcal{S})$ et $\operatorname{Vol}(\mathcal{S} - x)$.
Montrer que pour $\lambda \in [0, 1[$ suffisamment proche de 1, $\operatorname{Vol}\left(\dfrac{\lambda a}{a+1} \mathcal{S} \right) > k$.

10b. Pour λ comme dans la question précédente, soient $v_0, \ldots, v_k$ les $k+1$ points distincts dans $\dfrac{\lambda a}{a+1}\mathcal{S}$ vérifiant $v_i - v_j \in \mathbb{Z}^n$ pour tout i, j dont l'existence est assurée par le Théorème 1. Montrer que les points $v_i - v_j$ sont dans $\lambda\mathcal{S}$. En déduire que les $v_i - v_j$ sont dans $\mathring{\mathcal{S}}$.

10c. Montrer qu'il existe un indice $j \in \{0, \ldots, k\}$ tels que les $(2k+1)$ points $0, \pm(v_i - v_j)$, pour $i \in \{0, \ldots, k\} \setminus \{j\}$ soient distincts. En déduire l'énoncé de la question **10**, puis que

$$\operatorname{Card}(\mathring{\mathcal{S}} \cap \mathbb{Z}^n) \geqslant \operatorname{Vol}(\mathcal{S}) \left(\frac{a(\mathcal{S})}{2} \right)^n.$$

Troisième partie

On dit que deux simplexes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ de $\mathbb{R}^n$ sont *équivalents* s'il existe un ordre d'énumération des sommets $s_0, s_1, \ldots, s_n$ de $\mathcal{S}$, et $s'_0, s'_1, \ldots, s'_n$ de $\mathcal{S}'$, et une matrice A de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ tels que $A(s_i - s_0) = s'_i - s'_0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

11. Montrer que deux simplexes entiers $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont équivalents si et seulement s'il existe une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ et un vecteur $b \in \mathbb{Z}^n$ tels que $\mathcal{S}' = A(\mathcal{S}) - b$.

12. Montrer que le volume, le nombre de points entiers et le nombre de points intérieurs entiers sont les mêmes pour deux simplexes entiers équivalents.

13. Montrer qu'un simplexe entier $\mathcal{S}$ est équivalent à un simplexe entier contenu dans le cube $[0, n! \operatorname{Vol}(\mathcal{S})]^n$.
On pourra utiliser la question **6** *pour une matrice M bien choisie.*

On admet le résultat suivant que l'on pourra utiliser sans démonstration.

Théorème 2. *Pour tout entier strictement positif k, il existe une constante strictement positive $C(n,k)$ telle que pour tout simplexe entier $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^n$ possédant exactement k points intérieurs entiers,* $\operatorname{Vol}(\mathcal{S}) \leqslant C(n,k)$.

14. Déduire du Théorème 2 que pour tout entier strictement positif k, il n'existe à équivalence près qu'un nombre fini de simplexes entiers de $\mathbb{R}^n$ ayant exactement k points intérieurs.

Quatrième partie

Le but de cette partie, qui ne faisait pas partie du sujet du concours, est de démontrer les Théorèmes 1 et 2 énoncés et utilisés dans les deuxième et troisième parties.

15. Soit $\mathcal{S}$ un simplexe de $\mathbb{R}^n$ et k un entier tel que $\operatorname{Vol}(\mathcal{S}) > k$.

15a. Montrer qu'il existe $x \in [0,1[^n$ et $(k+1)$ éléments de $\mathbb{Z}^n$ $u_0, \ldots, u_k$ tels que $x \in \mathcal{S} - u_i$ pour $i = 0, \ldots, k$.
On pourra étudier les ensembles $(u + [0,1[^n) \cap \mathcal{S}$ quand u décrit $\mathbb{Z}^n$; et admettre le fait – hors programme de CPGE – que le volume d'un simplexe est sa mesure de Lebesgue, qui est sous-additive.

15b. En déduire l'existence des $(k+1)$ points $v_0, \ldots, v_k$ qui satisfont aux conditions du Théorème 1.

15c. Montrer le Théorème 1, c'est-à-dire qu'ici, on suppose seulement que $\mathrm{Vol}(\mathcal{S}) \geqslant k$.

16. Soient $t_1, \ldots, t_n$ des réels strictement positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ et soit $N \geqslant n$ un entier. On souhaite montrer qu'il existe des entiers positifs ou nuls $p_1, \ldots, p_n$ et q tels que

i) $1 \leqslant q \leqslant N^{n-1}$,

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = q$,

iii) $|qt_1 - p_1| \leqslant \dfrac{n}{N}$,

iv) pour tout $i = 2, \ldots, n$, $|qt_i - p_i| \leqslant \dfrac{1}{N}$.

16a. En considérant les vecteurs de coordonnées $(\{kt_2\}, \ldots, \{kt_n\}) \in [0,1[^{n-1}$ quand k décrit $\{0, \ldots, N^{n-1}\}$, montrer qu'il existe des entiers $p_2, \ldots, p_n, q \geqslant 0$ vérifiant les conditions i) et iv).

16b. Conclure.

17. Le but de cette question est de montrer que quels que soient les entiers strictement positifs n et k, il existe une constante $\alpha(k,n) \in]0,1[$ telle que, si $t_1, \ldots, t_n$ sont des réels strictement positifs vérifiant $1 > \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i > 1 - \alpha(k,n)$, alors il existe des entiers positifs ou nuls $p_1, \ldots, p_n \geqslant 0$ et q tels que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = q > 0, \quad \text{et pour tout } i = 1, \ldots, n, \quad (kq+1)t_i > kp_i.$$

On procède par récurrence sur n.

17a. Traiter le cas $n = 1$ en montrant que la constante $\alpha(k,1) = \dfrac{1}{k+1}$ convient.

On suppose l'énoncé vrai jusqu'au rang $n - 1 \geqslant 1$. En particulier, $\alpha(k, n-1) > 0$ est définie pour tout $k \geqslant 1$. On pose pour $k \geqslant 1$

$$\alpha(k,n) = \frac{1}{4kN^{n-1}} \quad \text{où} \quad N = 1 + \max\left(\frac{4k}{\alpha(k,n-1)}, 2kn(n+1)\right).$$

On se donne $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \cdots \geqslant t_n > 0$, et on suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1 - \alpha$ avec $0 < \alpha < \alpha(k,n)$.

17b. Si $t_n < \alpha(k, n-1) - \alpha$, établir l'énoncé au rang n.

17c. Si $t_n \geqslant \alpha(k, n-1) - \alpha$, appliquer le résultat de la question **16** aux $\dfrac{t_i}{1-\alpha}$, $i = 1, \ldots, n$. Avec ses notations, montrer que

$$\alpha(k, n) < \min\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}\alpha(k, n-1)\right) \quad \text{et} \quad 1 - qk\frac{\alpha}{1-\alpha} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Conclure en distinguant les cas $i \geqslant 2$ et $i = 1$.

18. Soit $\mathcal{S}$ un simplexe entier de $\mathbb{R}^n$ de sommets $0, s_1, \ldots, s_n$ ayant exactement k points intérieurs entiers et soit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i s_i$ un point entier intérieur de $\mathcal{S}$.

18a. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i \leqslant 1 - \alpha(k, n)$. (On pourra raisonner par l'absurde et construire alors $k+1$ points entiers distincts intérieurs à $\mathcal{S}$).

18b. Montrer que $\dfrac{\alpha(k, n)}{1 - \alpha(k, n)} x \in (\mathcal{S} - x)$.

18c. En déduire que $a(\mathcal{S} - x) \geqslant \dfrac{\alpha(k, n)}{1 - \alpha(k, n)}$.

19. Conclure la preuve du Théorème 2.