On rappelle que dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, l'application qui à tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ associe le réel $\|X\| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

On dit qu'une suite de vecteurs $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ converge vers un vecteur Λ de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\lim\limits_{k\to\infty} \|X^{(k)} - \Lambda\| = 0$.

Préliminaires

1°) Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, montrer que l'application qui à toute matrice $A = [a_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ associe le réel $|||A||| = \max\limits_{i=1\ldots n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2°) Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|MX\| \leqslant |||M|||\,\|X\|$.

3°) Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{R})$, $|||AB||| \leqslant |||A||| \times |||B|||$.

Dans la suite A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement dominante, c'est à dire telle que

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad |a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

On désigne aussi par D, E, et F les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par :

$D = [d_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $d_{ii} = a_{ii}$ et $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

$E = [e_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $e_{ij} = -a_{ij}$ si $i > j$ et $e_{ij} = 0$ sinon.

$F = [f_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $f_{ij} = -a_{ij}$ si $i < j$ et $f_{ij} = 0$ sinon.

De sorte que l'on a $A = D - E - F$.

Partie I

1°)

a) Justifier l'existence de la matrice J définie par $J = D^{-1}(E + F)$.

b) Montrer que $|||J||| < 1$.

2°)

a) Soit $Y \in \mathbb{R}^n$; Etablir l'équivalence $(AY = 0) \Longleftrightarrow (Y = JY)$.

b) En déduire que A est inversible.

3°) $B \in \mathbb{R}^n$ désignant un vecteur fixé, on appelle Λ l'unique solution du système $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^n$. On considère la suite de vecteurs $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ définie par $\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ \forall k \in \mathbb{N},\ X^{(k+1)} = JX^{(k)} + D^{-1}B \end{cases}$

a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $X^{(k+1)} - \Lambda = J\left(X^{(k)} - \Lambda\right)$.

b) En conclure que la suite $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers Λ.

Partie II : rapidité de convergence

1°) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\|X^{(p+q)} - X^{(p)}\| \leqslant \left(1 + |||J||| + \cdots + |||J|||^{q-1}\right) \|X^{(p+1)} - X^{(p)}\|$

2°) En déduire $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\|X^{(p)} - \Lambda\| \leqslant \dfrac{1}{1 - |||J|||} \|X^{(p+1)} - X^{(p)}\|$

3°) Quel intérêt présente selon vous cette formule ?