Lycée Michel Montaigne — **Devoir n° 4 de mathématiques MPSI 2** — le 15 décembre 2006

Exercice

On souhaite étudier la suite définie par : $v_0 \in \mathbb{R}$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = (v_n)^2 - 1$.
On considère l'application de la variable réelle $f : x \mapsto x^2 - 1$.
Sur l'annexe, on a représenté la courbe d'équation $y = f(x)$ et la droite d'équation $y = x$.
Vous devrez compléter l'annexe au fur et à mesure de l'exercice en utilisant des couleurs différentes.

1) Montrer que si v converge, alors seules deux limites à déterminer, notées α et β,sont possibles, avec $\beta < 0 < \alpha$.
2) Que dire la suite v si v_0 prend l'une des sept valeurs suivantes : α, β, $-\alpha$ et $-\beta$, -1, 0 et 1? (Repérer ces valeurs sur l'axe des abscisses de l'annexe)?
3) **a)** Soit $v_0 \in]\alpha, +\infty[$.
Tracer les premiers termes de la suite v sur l'axe des abscisses en laissant les traits de construction.
A l'aide de la fonction f, montrer que v tend vers $+\infty$.
b) Faire le même travail pour $v_0 \in]-\infty, -\alpha[$.
4) On suppose dans cette question : $v_0 \in]-1, \beta[$.
a) Montrer que la suite v est bornée et tracer les premiers termes de la suite v.
b) Montrer que le polynôme associé à $x \mapsto (f \circ f)(x) - x$ est divisible par $X^2 - X - 1$ et écrire la factorisation correspondante.
c) Quelles sont les limites réelles possibles pour les suites extraites (v_{2n}) et (v_{2n+1})?
d) Montrer que ces deux suites extraites sont convergentes et déterminer leur limite. Que dire de la suite v?
5) A l'aide de la question précédente, traiter les deux cas suivants : $v_0 \in]-\beta, \beta[$, puis $v_0 \in]-\beta, 1[$.
6) On suppose dans cette question : $v_0 \in]1, \alpha[$.
a) Tracer les premiers termes de la suite v.
b) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant v_n < \alpha$.
c) Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que l'on ait : $-1 \leqslant v_N \leqslant 1$.
(On pourra raisonner par l'absurde)
d) Achever l'étude de v.
7) Traiter le cas restant.

Problème : Théorème de Lucas.

α désigne un nombre irrationnel positif fixé.
On désigne par G l'ensemble suivant : $\{p + q\,\alpha \,/\, (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$.
Le but du problème est de résoudre une équation diophantienne en utilisant l'ensemble G.

Partie 1 : une suite convergente

1) Montrer que les égalités : $x_0 = \alpha$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n - [x_n]}$ définissent correctement une suite (x_n) de nombres irrationnels, où $[x_n]$ désigne la partie entière de x_n.
On définit alors deux nouvelles suites d'entiers naturels par : $p_0 = 1$, $p_1 = [\alpha]$ et $q_0 = 0$, $q_1 = 1$, puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = p_n.[x_n] + p_{n-1} \qquad \text{et} \qquad q_{n+1} = q_n.[x_n] + q_{n-1}$$

2) Montrer que la suite $(q_n)_{n \geqslant 2}$ est une suite strictement croissante d'entiers. En déduire la limite de q.
3) Calculer par récurrence $p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Qu'en déduit-on sur la fraction $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)?
4) Calculer $p_n q_{n+2} - p_{n+2} q_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5) Prouver, pour tout nombre entier naturel n, la relation : $\alpha = \dfrac{p_{n+1} x_{n+1} + p_n}{q_{n+1} x_{n+1} + q_n}$.
6) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, comparer les nombres réels r_{2n}, α et r_{2n+1}.
7) Montrer que les suites (r_{2n}) et (r_{2n+1}) sont adjacentes, puis que (r_n) est convergente et donner sa limite.
8) Montrer : $\forall n \geqslant 1$, $0 < r_{2n} - \alpha \leqslant \left(\dfrac{1}{q_{2n}}\right)^2$.

Partie 2 : densité de G dans $\mathbb{R}$

On note G_+^* l'ensemble des éléments de G strictement positifs.

9) Montrer que G_+^*, comme partie de l'ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leqslant)$, possède une borne inférieure.
On note : $g = \inf(G_+^*)$.

10) A l'aide de la question 8, trouver une suite de G_+^* convergeant vers 0 et en déduire : $g = 0$.

On fixe deux réels x et y avec $x < y$.

11) Montrer qu'il existe un élément u de G_+^* tel que : $0 < u < \dfrac{y-x}{2}$.

12) Montrer qu'il existe un entier relatif m tel que : $mu \leqslant \dfrac{x+y}{2} < mu + u$.

13) En déduire qu'il existe un élément de G appartenant à l'intervalle ouvert $]x, y[$.

Partie 3 : structure d'anneau

Jusqu'à la fin du problème, α est l'unique racine réelle positive du polynôme $X^2 - X - 1$.
On note β l'autre racine de ce polynôme.

14) Donner la valeur de α et montrer que α est un nombre irrationnel.

15) Montrer que l'ensemble G est un sous-anneau de l'anneau des nombres réels $(\mathbb{R}, +, \times)$.

16) Justifier que pour tout élément de G il existe un unique couple $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $x = p + q\,\alpha$.

17) Pour $x = p + q\,\alpha$ (avec $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$), on pose : $\varphi(x) = p + q.\beta$ et $N(x) = x\,\varphi(x)$.

a) Vérifier : $\forall x \in G\,,\, \varphi(x) \in G$.

b) Montrer que $\varphi : G \longrightarrow G$ est un morphisme d'anneaux.

c) Montrer : $\forall (x,y) \in G^2\,,\, N(xy) = N(x).N(y)$.

18) Soit A l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $(G, +, \times)$. Pour $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$, montrer l'équivalence :

$$(p + q\,\alpha) \in A \Leftrightarrow N(p + q\,\alpha) \in \{-1, 1\} \Leftrightarrow |p^2 + pq - q^2| = 1$$

Partie 4 : résolution d'une équation diophantienne

On note : $B = \{p + q.\alpha \,/\, (p,q) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } (p + q.\alpha) \in A\}$.
Dans la suite, les lettres p, p', q, q' désignent des entiers.

19) Démontrer que pour tout élément $(p + q\,\alpha)$ de B, il existe un élément $(p' + q'\,\alpha)$ de A tel que :

$$\alpha.(p' + q'\,\alpha) = p + q\,\alpha$$

Montrer que si $(p + q\,\alpha)$ est différent de 1, alors $(p' + q'\,\alpha)$ appartient à B.

20) En déduire l'inclusion : $B \subset \{\alpha^n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$.

On considère la suite u suivante :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_1 = 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

21) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\, u_n + u_{n+1}.\alpha = \alpha^{n+1}$.

22) Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de l'équation (théorème de Lucas, 1876) :

$$(p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad , \quad (p^2 + pq - q^2)^2 = 1.$$

23)a) Déterminer la suite (r_n) pour la valeur de α choisie désormais.

b) En déduire la limite de la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

c) Montrer alors, en utilisant ce qui précède, l'équivalent :

$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\,\alpha^n$$