ECS 1 DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N° 1 2001-2002

Ce devoir surveillé consiste en un problème, dont l'énoncé comprend ***deux pages****. Veiller à répondre aux questions dans l'ordre où elles sont posées et à numéroter* ***complètement*** *les questions traitées, comme elles le sont dans l'énoncé (par exemple : I. 2. b. ou II. 6.).*

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la concision, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une grande part dans l'appréciation des copies. Tout document est interdit, ainsi que l'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

• On dénote $\mathbb{N}$ (*resp.* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) l'ensemble des nombres entiers naturels (*resp.* nombres entiers relatifs, nombres rationnels, nombres réels).

• On rappelle que $\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel et que : $\sqrt{5} \simeq 2{,}236$

PARTIE I

• On désigne par α et β les solutions de l'équation : $z^2 - z - 1 = 0$, à l'inconnue z, avec $\alpha > \beta$.

I. 1. a. Placer les nombres réels α et β par rapport à -1, 0 et 1.
I. 1. b. Donner la valeur de $\alpha + \beta$ et de $\alpha\beta$.

I. 2. a. Démontrer que les réels α et β sont irrationnels.
I. 2. b. Soient x, y, x', y' des nombres entiers relatifs tels que : $x + y\alpha = x' + y'\alpha$.
Démontrer : $x = x'$, $y = y'$.

• Soit $\boldsymbol{A}$ l'ensemble des nombres réels de la forme : $x + y\alpha$, avec $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$.
On tiendra pour évident que si $z \in \boldsymbol{A}$, alors $-z \in \boldsymbol{A}$.

I. 3. Démontrer que : $\beta \in \boldsymbol{A}$.

I. 4. Démontrer que si $z \in \boldsymbol{A}$ et $z' \in \boldsymbol{A}$, alors : $z + z' \in \boldsymbol{A}$ et $zz' \in \boldsymbol{A}$.

PARTIE II

• Pour tout $z \in \boldsymbol{A}$, avec : $z = x + y\alpha$, $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, on pose : $\sigma(z) = x + y\beta$.

II. 5. a. Démontrer que si $z \in \boldsymbol{A}$, alors : $\sigma(z) \in \boldsymbol{A}$, en sorte que σ est une application de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{A}$.
II. 5. b. Qu'est-ce que l'application : $\sigma \circ \sigma$?
II. 5. c. Démontrer que l'application σ est bijective, et caractériser la bijection réciproque σ^{-1}.

II. 6. Démontrer que si $z \in \boldsymbol{A}$ et $z' \in \boldsymbol{A}$, alors : $\sigma(z + z') = \sigma(z) + \sigma(z')$ et $\sigma(zz') = \sigma(z)\sigma(z')$.

Attention, l'énoncé continue sur la page 2... ⟶

• Pour tout $z \in \boldsymbol{A}$, on pose : $N(z) = z\sigma(z)$.

II. 7. a. Démontrer que si $z \in \boldsymbol{A}$, alors : $N(z) \in \mathbb{Z}$. (*Ind.* poser : $z = x + y\alpha$, $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, et donner l'expression de $N(z)$ en fonction de x et y).
II. 7. b. Démontrer que si $z \in \boldsymbol{A}$ et $z' \in \boldsymbol{A}$, alors : $N(zz') = N(z)N(z')$.

PARTIE III

• Soit $\boldsymbol{U}$ l'ensemble des réels $z \in \boldsymbol{A}$ non nuls dont l'inverse z^{-1} est aussi élément de $\boldsymbol{A}$.

III. 8. a. Démontrer que si $z \in \boldsymbol{U}$, alors : $-z \in \boldsymbol{U}$, et $z^{-1} \in \boldsymbol{U}$, et $\sigma(z) \in \boldsymbol{U}$.
III. 8. b. Démontrer que si $z \in \boldsymbol{U}$ et $z' \in \boldsymbol{U}$, alors : $zz' \in \boldsymbol{U}$.
III. 8. c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\alpha^n \in \boldsymbol{U}$.

III. 9. a. Démontrer que si $z \in \boldsymbol{A}$ et si $|N(z)| = 1$, alors $z \in \boldsymbol{U}$.
III. 9. b. *Réciproquement*, démontrer que si $z \in \boldsymbol{U}$, alors $|N(z)| = 1$.

III. 10. Soit $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \cap \,]1, +\infty[$, et soit $z \in \boldsymbol{V}$, avec : $z = x + y\alpha$, $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$.
III. 10. a. Démontrer : $| x + y\beta | < 1$.
III. 10. b. En déduire : $y > 0$ et $x > \dfrac{-\alpha - \beta}{\alpha - \beta}$, puis : $y \geq 1$ et $x \geq 0$.
III. 10. c. Démontrer que l'ensemble $\boldsymbol{V}$ contient un plus petit élément, et déterminer ce plus petit élément.

III. 11. a. On admet que pour tout réel $z \geq \alpha$, il existe un seul $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\alpha^n \leq z < \alpha^{n+1}$.
Démontrer : $\boldsymbol{V} = \{\alpha^n \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$.
III. 11. b. Décrire l'ensemble $\boldsymbol{U}$.

PARTIE IV

• La *suite de Fibonacci* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour tout entier $n \geq 2$.

IV. 12. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\alpha^n = F_{n-1} + F_n\alpha$.

IV. 13. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner la valeur de : $F_{n-1}^2 + F_{n-1}F_n - F_n^2$.

IV. 14. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $\left|x^2 + xy - y^2\right| = 1$ (*Ind.* On donnera la solution en fonction des termes de la suite de Fibonacci).

IV. 15. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $X^2 - 5Y^2 = -4$.

Fin de l'énoncé.