

3. Exprimer les dérivées $x \mapsto \varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ en fonction de x , φ et x , ψ respectivement.

Exercice 1.6. On considère deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, et la fonction $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x, y, z, t) = (tx + yf(t) + g(t) - z; x + yf'(t) + g'(t)).$$

1. Donner des conditions suffisantes pour que l'équation $f(x, y, z, t) = 0$ définisse localement au voisinage de $(0, 0)$ une fonction $\varphi : (x, y) \mapsto (u(x, y); v(x, y)) = (z; t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\varphi(0, 0) = (0, 0)$.
2. Montrer qu'on a, au voisinage de l'origine :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = v(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = f(v(x, y)).$$

3. Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^2$ (les dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues) au voisinage de $(0, 0)$.

4. Montrer que

au voisinage de $(0, 0)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) \right)^2 = 0.$$