

# CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2023

---

## MATHÉMATIQUES

(Classes de terminale voie générale spécialité mathématiques)

DURÉE : 5 HEURES

---

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.  
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.*

### Consignes aux candidats

- Ne pas utiliser d'encre claire
- N'utiliser ni colle, ni agrafe
- Numéroté chaque page en bas à droite (numéro de page / nombre total de pages)
- Sur chaque copie, renseigner l'en-tête + l'identification du concours :

**Concours / Examen : CGL**

**Epreuve : 101**

**Matière : MATH**

**Session : 2023**

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

*Le sujet comporte trois problèmes indépendants.*

*Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.*

## Exercice 1 : Soyons rationnels!

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $v(n)$  le plus grand entier  $k$  tel que  $\frac{n}{2^k}$  soit un entier.

On définit la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  par récurrence, en posant  $u_1 = 1$  puis, pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } u_{n-1} = 0; \\ 1 + 2v(n) - \frac{1}{u_{n-1}} & \text{si } u_{n-1} \neq 0. \end{cases}$$

- 1) Donner la valeur des entiers  $v(1)$ ,  $v(2)$ ,  $v(3)$  et  $v(4)$ .
- 2) Démontrer, pour tout entier  $n \geq 1$ , que  $v(n) = 0$  si  $n$  est impair et que  $v(n) = v\left(\frac{n}{2}\right) + 1$  si  $n$  est pair.
- 3) Calculer les huit premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  et vérifier que  $u_8 = 4$ .
- 4) Démontrer, pour tout entier  $n \geq 1$ , que  $u_n$  est un nombre rationnel strictement positif, que  $u_{2n} = u_n + 1$  et que  $u_{2n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$ .
- 5) Démontrer que tout nombre rationnel strictement positif est égal à un terme  $u_n$ .
- 6) Démontrer que tout nombre rationnel strictement positif est égal à un unique terme  $u_n$ .

## Exercice 2 : Limite sympathique!

### Partie A : Quelques exemples

- 1) On considère dans cette question, pour tout entier  $n \geq 1$ , l'équation

$$x^2 + \frac{1}{n}x - 1 = 0,$$

d'inconnue  $x$ .

- a) Soit  $n$  un entier naturel non nul. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle positive; on la note  $x_n$ . Exprimer  $x_n$  en fonction de  $n$ .
- b) Démontrer que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  converge; on note  $x_\infty$  sa limite.
- c) Démontrer que  $x_\infty$  est solution de l'équation

$$x^2 - 1 = 0.$$

- 2) On considère dans cette question, pour tout entier  $n \geq 1$ , l'équation

$$\frac{1}{n}y^2 - y - 1 = 0,$$

d'inconnue  $y$ .

- a) Soit  $n$  un entier naturel non nul. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle positive; on la note  $y_n$ .
- b) Démontrer que la suite  $(y_n)_{n \geq 1}$  diverge.

- 3) On considère dans cette question, pour tout entier  $n \geq 1$ , l'équation

$$z^3 + \frac{1}{n}z^2 - 1 = 0,$$

d'inconnue  $z$ .

- a) Soit  $n$  un entier naturel non nul.
- Étudier les variations de la fonction  $z \mapsto z^3 + \frac{1}{n}z^2 - 1$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .
  - En déduire que cette équation admet une unique solution réelle positive; on la note  $z_n$ .  
Démontrer que  $z_n$  appartient à l'intervalle  $]0, 1[$ .
- b) Démontrer que la suite  $(z_n)_{n \geq 1}$  est convergente.  
On pourra s'intéresser au signe du réel  $z_{n+1}^3 + \frac{1}{n}z_{n+1}^2 - 1$ .
- c) On note  $z_\infty$  la limite de la suite  $(z_n)_{n \geq 1}$ . Démontrer que  $z_\infty$  est solution de l'équation

$$z^3 - 1 = 0.$$

- 4) On considère dans cette question, pour tout entier  $n \geq 1$ , l'équation

$$\frac{1}{n}t^3 - t^2 - 1 = 0,$$

d'inconnue  $t$ .

- Soit  $n$  un entier naturel non nul. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle; on la note  $t_n$ .
- La suite  $(t_n)_{n \geq 1}$  est-elle convergente? Si oui, quelle est sa limite?

### Partie B : Polynômes sympathiques

Dans les deux prochaines parties, on considère un entier  $d \geq 1$ . La fonction  $P$  est un *polynôme de degré au plus  $d$*  s'il existe des réels  $a_0, a_1, \dots, a_d$  tels que

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

pour tout réel  $x$ .

Soit  $P: x \mapsto a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  un polynôme de degré au plus  $d$ . On dit que :

- ▷  $P$  est *initialement sympathique* si  $a_0 = -1$  et si  $a_k \geq 0$  pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq d$ ;
- ▷  $P$  est *faussement sympathique* si  $a_0 = -1$  et si  $a_k \leq 0$  pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq d$ ;
- ▷  $P$  est *vraiment sympathique* si  $a_0 = -1$  et s'il existe un entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq d-1$  et pour lequel  $a_1 \leq 0, a_2 \leq 0, \dots, a_k \leq 0$  et  $a_{k+1} > 0, a_{k+2} \geq 0, \dots, a_d \geq 0$ .

Enfin, on dit que  $P$  est *sympathique* s'il est initialement, faussement ou vraiment sympathique.

- Quels sont les polynômes qui sont à la fois faussement sympathiques et initialement sympathiques?
- Démontrer que tout polynôme faussement sympathique est
  - strictement négatif sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ ;
  - décroissant sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .
- Soit  $P$  un polynôme vraiment sympathique et initialement sympathique.
  - Démontrer que  $P$  est strictement croissant sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ ;
  - Démontrer que l'équation  $P(x) = 0$  admet une unique solution strictement positive.
- Soit  $P$  un polynôme vraiment sympathique mais pas initialement sympathique.
  - Démontrer qu'il existe un réel  $b > 0$ , un entier  $\ell \geq 0$  et un polynôme  $Q$  vraiment sympathique tels que

$$P'(x) = bx^\ell Q(x)$$

pour tout réel  $x$ .

b) Démontrer qu'il existe un réel  $r > 0$  tel que le polynôme  $P$  vérifie les quatre propriétés suivantes :

- ▷  $P$  est décroissant sur l'intervalle  $[0, r]$  ;
- ▷  $P$  est strictement croissant sur l'intervalle  $[r, +\infty[$  ;
- ▷  $P$  est strictement négatif sur l'intervalle  $[0, r]$  ;
- ▷ l'équation  $P(x) = 0$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[r, +\infty[$ .

9) Quels sont les polynômes sympathiques  $P$  pour lesquels l'équation  $P(x) = 0$  admet au moins une solution strictement positive ? Donner, dans ce cas, le tableau de signes de  $P$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

### Partie C : De la suite dans les idées

On considère désormais des polynômes vraiment sympathiques  $P_1, P_2, \dots$ . Puisque ces polynômes sont de degré au plus  $d$ , on peut écrire chaque polynôme  $P_n$  sous la forme

$$P_n: x \mapsto a_{d,n}x^d + a_{d-1,n}x^{d-1} + \dots + a_{2,n}x^2 + a_{1,n}x + a_{0,n}.$$

On suppose en outre, pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq d$ , que la suite  $(a_{k,n})_{n \geq 1}$  est convergente ; on note  $a_{k,\infty}$  sa limite.

On considère alors le polynôme  $P_\infty$  défini par

$$P_\infty: x \mapsto a_{d,\infty}x^d + a_{d-1,\infty}x^{d-1} + \dots + a_{2,\infty}x^2 + a_{1,\infty}x + a_{0,\infty}.$$

Enfin, pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $x_n$  l'unique solution strictement positive de l'équation  $P_n(x) = 0$ . Ci-dessous, on étudie la convergence éventuelle de la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$ .

- 10) Soit  $t$  un réel fixé. Démontrer que la suite  $(P_n(t))_{n \geq 1}$  converge vers  $P_\infty(t)$ .
- 11) Démontrer que le polynôme  $P_\infty$  est sympathique.
- 12) On suppose dans cette question que le polynôme  $P_\infty$  est vraiment sympathique, et on note  $x_\infty$  l'unique solution strictement positive de l'équation  $P_\infty(x) = 0$ .
  - a) Soit  $u$  et  $v$  deux réels tels que  $0 < u < x_\infty < v$ . Démontrer qu'il existe un entier  $M_{u,v}$  tel que  $P_n(u) < 0 < P_n(v)$  pour tout entier  $n \geq M_{u,v}$ .
  - b) En déduire que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $x_\infty$ .
- 13) On suppose dans cette question que le polynôme  $P_\infty$  est faussement sympathique. Démontrer que  $(x_n)_{n \geq 1}$  diverge vers  $+\infty$ .
- 14) Retrouver les résultats de la partie A.

### **Exercice 3 : Polynômes et polygones réguliers**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $k$  un entier tel que  $k \geq 3$ . Les points  $M_1, M_2, \dots, M_k$  sont les sommets d'un polygone régulier de centre  $O$  si ces points

- ▷ sont deux à deux distincts,
- ▷ apparaissent dans le sens trigonométrique (c'est-à-dire le sens contraire des aiguilles d'une montre) sur un même cercle de centre  $O$ , et
- ▷ vérifient l'égalité  $M_1M_2 = M_2M_3 = \dots = M_{k-1}M_k = M_kM_1$ .

En particulier, pour  $k = 3$ , il s'agit d'un triangle équilatéral; pour  $k = 4$ , il s'agit d'un carré.

Pour tout entier  $d \geq 0$ , une fonction  $P$  est un polynôme de degré  $d$  s'il existe des réels  $a_0, a_1, \dots, a_d$  tels que  $a_d \neq 0$  et

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

pour tout réel  $x$ ; on pourra admettre que, pour un tel polynôme, l'équation  $P(x) = 0$  admet au plus  $d$  solutions réelles.

Quant à elle, la fonction

$$P: x \mapsto 0$$

est appelée le *polynôme nul*.

Enfin, étant donné un polynôme  $P$  (nul ou non), on note  $\mathcal{C}_P$  la courbe représentative de  $P$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

### Partie A : Triangles équilatéraux

1) Soit  $P$  un polynôme de degré 1. Existe-t-il un triangle équilatéral dont les sommets appartiennent à  $\mathcal{C}_P$ ?

2) On considère les points

$$A\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), B\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ et } C\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

- a) Démontrer que  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre  $O$ .
- b) Démontrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  appartiennent à la courbe représentative du polynôme

$$Q: x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{3}(3x^2 - 2).$$

c) Démontrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  appartiennent à la courbe représentative du polynôme

$$R: x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{3}(3x^2 - 2) + x(x^2 - 1).$$

d) Démontrer que, pour tout entier  $d \geq 2$ , il existe un polynôme de degré  $d$  dont la courbe représentative contient les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

### Partie B : Carrés de centre $O$

Dans les questions 3) et 4), on considère un polynôme  $P$  et un carré  $ABCD$  de centre  $O$  dont les quatre sommets appartiennent à  $\mathcal{C}_P$ .

- 3) a) Exprimer les coordonnées des points  $B$ ,  $C$  et  $D$  en fonction de celles de  $A$ . Démontrer que les abscisses de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont distinctes et non nulles.
  - b) Démontrer que  $P$  est non nul et que son degré vaut au moins 3.
- 4) On suppose dans cette question qu'il existe des réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que

$$P: x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c.$$

- a) Démontrer que  $a = 0$  et  $c = 0$ .
- b) Démontrer que les abscisses respectives de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont solutions de l'équation

$$P(P(x)) + x = 0.$$

c) Démontrer que le polynôme

$$Q: x \mapsto x^4 + 3bx^3 + 3b^2x^2 + b(b^2 + 1)x + b^2 + 1$$

admet au moins deux racines positives distinctes.

- d) Démontrer que  $b < 0$ .  
 e) On suppose qu'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $0 < \alpha < \beta$  et

$$Q(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)^2$$

pour tout réel  $x$ . Démontrer qu'alors  $b = -\sqrt{8}$ , puis déterminer les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

- 5) a) Démontrer qu'il existe un polynôme  $P$  de degré 3 et un carré  $ABCD$  de centre  $O$  dont les sommets appartiennent à  $\mathcal{C}_P$ .  
 b) Pour quels entiers  $d$  existe-t-il un polynôme de degré  $d$  dont la courbe représentative contient les points  $A, B, C$  et  $D$  obtenus en question 5)a)?

### Partie C : Où l'on prouve que $d \geq k - 1$

Soit  $M_1M_2 \cdots M_k$  un polygone régulier de centre  $O$ . On suppose dans cette question qu'il existe un polynôme  $P$ , de degré  $d$ , dont la courbe contient les points  $M_1, M_2, \dots, M_k$ . On souhaite alors démontrer que  $d \geq k - 1$ .

Pour tout  $i$ , on note  $(x_i, y_i)$  les coordonnées de  $M_i$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

- 6) a) Pourquoi peut-on supposer que  $x_1$  est inférieur ou égal à  $x_2, x_3, \dots, x_k$  et que  $y_1 \leq 0$ ?  
 b) Démontrer que les abscisses  $x_i$  sont deux à deux distinctes et que les ordonnées  $y_i$  sont non nulles.  
 c) Démontrer qu'il existe un nombre réel  $R > 0$  et un nombre réel  $\theta$  appartenant à l'intervalle  $]0, \pi/k[$  tels que  $x_1 = -R \cos(\theta)$  et  $y_1 = -R \sin(\theta)$ .  
 d) Démontrer que  $x_1 < x_k < x_2 < x_{k-1} < x_3 < x_{k-2} < \dots$   
 e) Démontrer que  $P$  admet une racine sur chacun des  $k - 1$  intervalles

$$]x_1, x_k[, ]x_k, x_2[, ]x_2, x_{k-1}[, ]x_{k-1}, x_3[, ]x_3, x_{k-2}[, \dots$$

- f) En conclure que  $d \geq k - 1$ .

### Partie D : Où l'on prouve que tout entier $d \geq k - 1$ convient

On suppose dans cette partie que les abscisses  $x_i$  sont deux à deux distinctes et on veut démontrer que, pour tout entier  $d \geq k - 1$ , il existe un polynôme de degré  $d$  dont la courbe contient les points  $M_1, M_2, \dots, M_k$ .

- 7) Soit  $a$  et  $b$  deux réels. Dans le repère  $\mathcal{R}$ , on considère les points

$$A(\cos(a), \sin(a)), B(\cos(a+b), \sin(a+b)) \text{ et } C(-\sin(a), \cos(a)).$$

- a) Démontrer que le repère  $\mathcal{R}' = (O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$  est orthonormé.  
 b) Quelles sont les coordonnées du point  $B$  dans le repère  $\mathcal{R}'$ ?  
 c) En déduire que

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b); \\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b). \end{aligned}$$

- 8) On considère la suite de polynômes définie par  $T_0: x \mapsto 1, T_1: x \mapsto x$  et

$$T_{n+2}: x \mapsto 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

pour tout entier  $n \geq 0$ .

- a) Démontrer que  $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$  pour tout entier  $n \geq 0$  et tout réel  $\theta$ .  
 b) Soit  $\theta$  un réel, et soit  $\ell \geq 1$  et  $j \geq 0$  deux entiers. Démontrer que

$$T_{\ell-1}\left(\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right) - \cos(\ell\theta)\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right) = \sin(\ell\theta)\sin\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right).$$

- c) Démontrer que, pour tout entier  $d \geq k - 1$ , il existe un polynôme de degré  $d$  dont la courbe contient les points  $M_1, M_2, \dots, M_k$ .