(b) On suppose de plus que $f>0$; et on pose :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \int_0^1 f(z)^n dz$, $I_n = \sqrt[n]{a_n}$, $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

* Comme $f>0$ alors $\forall x \in [0,1]$, $f(x)^n > 0 \Rightarrow$
la suite $(b_n)_n$ est bien définie.

21/37

b1) Sens de variation et limite de $(a_n)_{n\geq 1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = \int_0^1 f^n(x)\left(f(x) - 1\right) dx$

Il vient que le signe de $(a_{n+1} - a_n)$ est
celui de $x \mapsto f(x) - 1$ sur $[0,1]$. On en
déduit que : $(a_n)_{n\geq 1}$ est :
* Croissante si $f \geq 1$ sur $[0,1]$.
* Décroissante si $f < 1$ sur $[0,1]$.

Pour la limite de la suite $(a_n)_n$ on
procède de manière analogue :

Ainsi : (*) $a_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ si $f \leq 1$ sur $[0,1)$
(**) $a_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$ si $f \equiv 1$ sur $[0,1]$
(**) $a_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$ si $f > 1$ sur $[0,1]$

(**) $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ si $f > 1$ sur [0,1]

(b.2) Sens de variation et limite de $(b_n)_{n\geq 0}$

(P1) Par définition avec $f>0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\underline{\underline{b_n > 0}}$

(P2) Par ailleurs : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on peut écrire :

$$\int_0^1 f(z)^{n+1}\,dz = \int_0^1 f(z)^{\frac{2n+2}{2}}\,dz = \int_0^1 f(z)^{\frac{n+2}{2}+\frac{n}{2}}\,dz$$

22/38

$$= \int_0^1 \left(f(z)^{\frac{n+2}{2}}\right) \times \left(f(z)^{\frac{n}{2}}\right) dz$$

Ainsi en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonct° : $f^{\frac{n+2}{2}}$ et $f^{n/2}$ on obtient sur [0,1]

$$\left(\int_0^1 f(z)^{n+1}\,dz\right)^2 \leq \left[\int_0^1 \left(f(z)^{\frac{n+2}{2}}\right)^2 dz\right]\left[\int_0^1 \left(f(z)^{\frac{n}{2}}\right)^2 dz\right]$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^1 f^{n+1}\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^{n+2}\right)\left(\int_0^1 f^{n}\right)$$

soit alors $\quad a_{n+1}^2 \leq a_{n+2} \cdot a_n$

$\Rightarrow \quad a_{n+1}^2 \leq a_n a_{n+2} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \Leftrightarrow b_n \leq b_{n+1}$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \leq b_{n+1} \Leftrightarrow (b_n)_{n>0}$ est $\nearrow$.

(P3) : Posons $M = \underset{[0,1]}{\mathrm{Max}} |f| = \underset{[0,1]}{\mathrm{Max}} f$ car $f > 0$ et cont sur $[0,1]$.

Il vient alors que : $\forall z \in [0,1]$, on a :

$$f(z) \leq M \Rightarrow f(z)^{n+1} \leq M f(z)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f^{n+1} \leq M \int_0^1 f^n \Rightarrow \frac{\int_0^1 f^{n+1}}{\int_0^1 f^n} \leq M$$

23/38

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \leq M \Rightarrow 0 < b_n \leq M$

On en déduit que $(b_n)_{n \geq 1}$ est Bornée.

Conl 1 : De (P1) - (P3), on en déduit que (b_n) est une suite croissante et majorée. Donc elle est convergente. D'où $\exists \, l \in \mathbb{R}$ /

$$l = \lim b_n \quad (L1)$$

Objectif : Montrons que $\lim b_n = \lim J_n = M$

(P4.(a)) $J_n \xrightarrow[n\to\infty]{} M$ où on rappel que $M = \max\limits_{[0,1]} |f| = \max\limits_{[0,1]} f$

On a : $\forall x \in [0,1]$, $f(x)^n \leq M^n \Rightarrow \int_0^1 f^n \leq M^n$

24/38

$\Rightarrow$ $J_n \leq M$ (R1)

∘ Par ailleurs f étant cont sur le segm $[0,1]$ alors

$\exists x^* \in [0,1] \,/\, f(x^*) = M$ (R2)

• soit $\varepsilon > 0$: par continuité de f en x^*

alors $\exists$ un ~~voisinage~~ image $V = [\alpha, \beta] \subset [0,1] \,/$

$x \in V$ et $|f(x) - f(x^*)| = |f(x) - M| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \forall x \in V$, $M - \varepsilon \leq f(x) \leq M + \varepsilon$ (R3)

$\Rightarrow \forall z \in V$, $f^n(z) \geq (M-\varepsilon)^m$

La suite, on a : $\int_\alpha^\beta f(z)^n dz \geq \int_\alpha^\beta (\Pi-\varepsilon)^n dz$

$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(z)^n dz \geq (\beta-\alpha)(\Pi-\varepsilon)^n \quad (R4)$

Comme $V=[\alpha,\beta] \subset [0,1]$ alors, on a :

$\int_0^1 f(z)^n dz \geq \int_\alpha^\beta f^n \quad (R_5)$.

25/38

En combinant $(R4)$ et (R_5), on obtient :

$\int_0^1 f^n \geq (\beta-\alpha)(\Pi-\varepsilon)^n \Rightarrow I_n \geq (\Pi-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq (\Pi-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}} \quad (R_6)$

On a : $(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} 1 \Rightarrow (\Pi-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} (\Pi-\varepsilon)$

Par suite $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0$

$\Rightarrow (\Pi-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}} \geq (\Pi-\varepsilon)-\varepsilon = \Pi-2\varepsilon \quad (R7)$

$(R6)$ et $(R7) \Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow I_n \geq \Pi-2\varepsilon \quad (R8)$

$\underline{f}$: De (R1) et (R8), on en déduit

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0$: 26/38

$2\varepsilon \leq I_n \leq \Pi \leq \Pi + 2\varepsilon$ (R9)

cela est vraie pour tout $\varepsilon > 0$

en déduit que $I_n \xrightarrow[n\infty]{} \Pi$ (L2)

(b)) Mq : $\lim I_n = \lim b_n$

près (P4(a)), $I_n \xrightarrow[n\infty]{} \Pi$ par continuité et

ntivité de $f > 0$ sur $[0, 1]$, on ~~en~~ déduit

que $\ln(I_n) \xrightarrow[n\infty]{} \ln(\Pi)$ (L3)

Car $x \longmapsto \ln(x)$ est cont sur $]0, +\infty[$)

Par ailleurs : $\ln(I_n) = \frac{1}{n}\ln(a_n) = \frac{1}{n}[\ln(a_n) - \ln(a_0)] + \frac{1}{n}\ln(a_0)$

(R10)

• D'une part d'après (L1) de (P3), on a :

$$\ln(b_n) \xrightarrow[n\infty]{} \ln(\ell) \quad (R11)$$

• D'autre part, le Théo de la Moyenne de CESARO avec (R11), on obtient que :

27/32

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(b_k) \xrightarrow[n\infty]{} \ln(\ell) \quad (R12)$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{n} \ln(b_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\ln(b_k)\right] + \ln(b_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) + \ln(b_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\ln(a_{k+1}) - \ln(a_k)\right] + \ln(b_n)$$

$$= \ln(a_n) - \ln(a_1) + \ln(b_n)$$

[SOMME TELESCOPIQUE]

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(b_k) = \frac{1}{n}\left[\ln(a_n) - \ln(a_1)\right] + \frac{\ln(b_n)}{n}$$

(R13)

En combinant les égalités (R10) et (R13), on trouve :

28/30

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(b_k) = \ln(I_n) - \frac{\ln(a_1)}{n} + \frac{\ln(b_n)}{n} \quad (R14)$$

On a : $\frac{\ln(a_1)}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$ et $\frac{\ln(b_n)}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$

Par conséquent par passage à la limite qd $n \longrightarrow +\infty$ ds (R14) compte tenu de (L3) et (R12), nous obtenons l'égalité suivante :

$$\ln(\ell) = \ln(M) \iff \underline{\underline{M = \ell}} \quad (L4)$$

Concl : $b_n \xrightarrow[n\infty]{} \ell = M = \max_{z\in[0,1]} f(z)$