DEVOIR D'ENTRAINEMENT FACULTATIF 4
A RENDRE LE LUNDI 04 DECEMBRE 2023

$\mathcal{MPSI}$ 1–Lycée Thiers

En direction du théorème des nombres premiers

Définitions et notations

Le logarithme népérien d'un réel x strictement positif sera noté $\mathrm{Log}(x)$. On note, $\mathcal{P}$, l'ensemble des nombres premiers. La lettre p (utilisée comme variable ou bien comme indice dans un produit ou une somme) désignera toujours un nombre premier ; par exemple, la somme $\sum_{p\leq 10} p$ désigne la somme des nombres premiers qui sont inférieurs ou égaux à 10, à savoir $2+3+5+7$.
Si n est un entier naturel non nul, et p un nombre premier, on note $v_p(n)$ la valuation p-adique de n : c'est l'exposant de p dans l'écriture de n en produit de nombres premiers ($v_p(n)$ est donc nul si p ne divise pas n). On note par ailleurs Δ_n le ppcm des entiers $1,\ldots,n$. Enfin, $\pi(n)$ est le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n :

$$\pi(n) = \mathrm{Card}\left(\mathcal{P} \cap \{1,\ldots,n\}\right)$$

Le but du problème est de fournir un encadrement de $\pi(n)$.

Calculs préliminaires

Pour tout couple (b,a) d'entiers naturels tels que $1 \leq b \leq a$, on pose

$$I(b,a) = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-b}dt$$

1. Soit a un entier naturel non nul. Calculer $I(1,a)$.

2. Soient a,b deux entiers naturels tels que $1 \leq b < a$. Prouver que

$$I(b+1,a) = \frac{b}{a-b} I(b,a)$$

3. Prouver que pour tout couple (b,a) d'entiers naturels tels que $1 \leq b \leq a$, on a

$$I(b,a) = \frac{1}{b\binom{a}{b}}$$

4. Soient a,b deux entiers naturels tels que $1 \leq b \leq a$. Prouver que

$$I(b,a) = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{1}{k+b}.$$

5. En déduire que $\Delta_a\, I(b,a)$ est un entier naturel, puis que l'entier $b\binom{a}{b}$ divise Δ_a.

Une minoration de $\pi(n)$

6. Soit n un entier naturel non nul. Justifier que les entiers $n\binom{2n}{n}$ et $(2n+1)\binom{2n}{n}$ divisent Δ_{2n+1}, puis que l'entier $n(2n+1)\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1}.

7. Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit k un entier compris entre 0 et $2n-1$. Calculer $\dfrac{\binom{2n}{k+1}}{\binom{2n}{k}}$.
2. Prouver que pour tout entier k compris entre 0 et $2n$, $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$.
3. En développant $(1+1)^{2n}$, prouver que $(2n+1)\binom{2n}{n} \geq 4^n$, en déduire $\Delta_{2n+1} \geq n4^n$.
4. Montrer que si $n \geq 9$, on a $\Delta_n \geq 2^n$ (on pourra raisonner suivant la parité de n).

On admettra que l'inégalité reste vraie pour $n \in \{7, 8\}$.

8. Soit n un entier naturel non nul.

1. Que vaut $v_p(\Delta_n)$ si p est un nombre premier strictement plus grand que n ? En déduire que
$$\Delta_n = \prod_{p \leq n} p^{v_p(\Delta_n)}$$
2. Prouver que $\Delta_n \leq n^{\pi(n)}$.
3. Montrer que si $n \geq 7$, alors
$$\operatorname{Log} 2 \frac{n}{\operatorname{Log} n} \leq \pi(n)$$

On admettra que cette inégalité est vraie aussi si $3 \leq n \leq 6$.

Une majoration de $\pi(n)$

Dans la suite, pour tout entier naturel non nul n, on pose $R_n = \prod_{p\leq n} p$ (c'est le produit des nombres premiers plus petits que n), avec la convention $R_1 = 1$.

9. Soit m un entier naturel. On note a_m le produit des nombres premiers qui sont compris entre $m+2$ et $2m+1$ (par convention, a_m vaut 1 s'il n'y a pas de nombres premiers entre $m+2$ et $2m+1$)

1. Montrer que a_m et $(m+1)!$ sont premiers entre eux. En déduire que a_m divise $\binom{2m+1}{m+1}$.
2. En développant $(1+1)^{2m+1}$, prouver que $4^m \geq \binom{2m+1}{m+1}$ et en déduire que $a_m \leq 4^m$.

10. Prouver que pour tout entier naturel n non nul, $R_n \leq 4^n$ (on pourra prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{1, \ldots, 2n\}, R_k \leq 4^k$).

11. Soit x un réel. Montrer par récurrence que pour tout entier n :
$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

En déduire que
$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad m! \geq \left(\frac{m}{e}\right)^m$$

12. On note $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers. Soit n un entier naturel non nul. Prouver que

$$(\pi(n))! \leq \prod_{k=1}^{\pi(n)} p_k$$

En déduire que $(\pi(n))! \leq 4^n$, puis que $\pi(n)\operatorname{Log}\pi(n) - \pi(n) \leq n\operatorname{Log}4$.

13. On cherche à prouver que pour tout entier $n \geq 3$, on a $\pi(n) \leq e\,\frac{n}{\operatorname{Log} n}$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un entier $k \geq 3$ tel que $\pi(k) > e\,\frac{k}{\operatorname{Log} k}$.

1. Étudier la monotonie de $\varphi : x \in [1, +\infty[\mapsto x\operatorname{Log}(x) - x$ et montrer que $\psi : x \in [1, +\infty[\mapsto \frac{\operatorname{Log} x}{x}$ est majorée par $\frac{1}{e}$.
2. Justifier que $\frac{e-\operatorname{Log}4}{e} < \frac{\operatorname{Log}(\operatorname{Log} k)}{\operatorname{Log} k}$ et conclure. (On donne $e \sim 2,7$ et $\operatorname{Log}(4) \sim 1,4$)