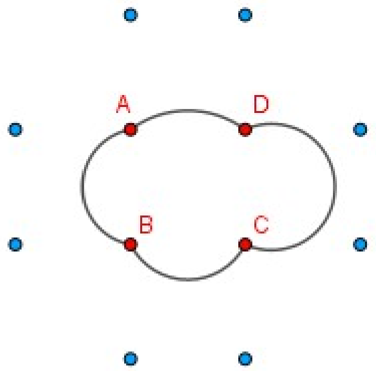
Périmètre minimum en fonction de l'aire

Remerciements à lmod qui a proposé ce thème sur le forum www.ilemaths.net



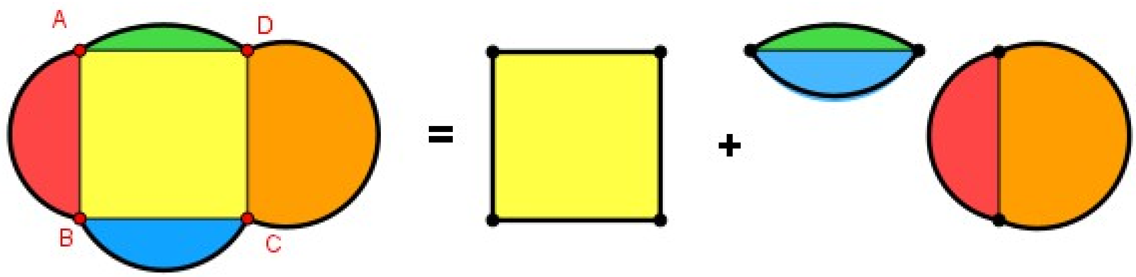
L'objet de l'étude est la recherche des configurations de la forme suivante, accrochée sur un réseau carré de maille 1, donnant un périmètre minimum pour une aire donnée

Le domaine de définition est tant que aucun des arcs n'atteint un des points bleus

On sait que, sans autre contrainte, pour une aire donnée le périmètre minimum est pour un cercle
Ici la contrainte des points fixes ABCD change la donne.
On pourrait croire que des arcs tous identiques serait la solution. Il n'est est rien comme on le verra.
Cela dépend de la valeur de l'aire.
On va faire l'étude sans tenir compte des points bleus, on restreindra ensuite le domaine des solutions obtenues pour tenir compte des points bleus.

Propriétés de base

L'aire peut être découpée en 5 morceaux : le carré (d'aire = 1) et les 4 segments de disques
Sans rien changer par ailleurs, on peut permuter les segments de disque
Pour simplifier l'étude on peut regrouper les segments par paires :

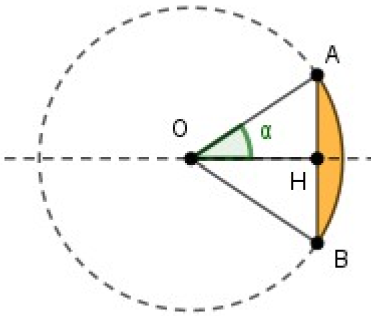


nous devons donc étudier
- une surface d'aire S formée de deux segments de disque, en fonction de la valeur de S
- la répartition de l'aire totale, hors le carré, entre les deux surfaces S et S' selon la valeur de l'aire totale

Étude d'une surface formée de deux segments

de corde commune = 1 et d'aire totale S donnée.
Sans faire une étude exhaustive avec des calculs excessifs, nous allons faire tracer par Geogebra les courbes périmètre en fonction du déséquilibre des deux arcs, selon la valeur de S.

Pour ce faire nous devons déja savoir tracer un segment d'aire donnée s
On va utiliser le demi angle au centre α de ce segment. de disque et calculer l'aire s en fonction de α (AB = 1)



Tout calculs faits on obtient $s=\frac{\alpha}{(2\sin\alpha)^2}-\frac{1}{4\tan\alpha}$ [eq. 1]

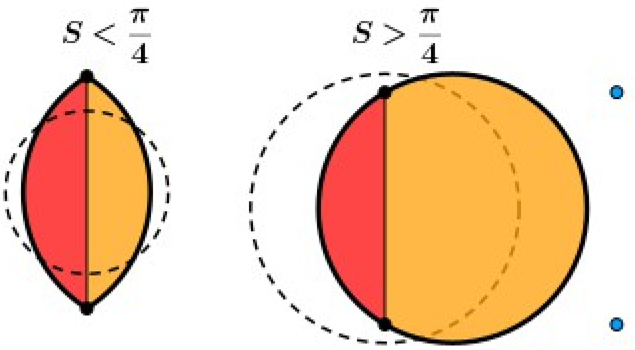
Tracer un segment d'aire s donnée revient à résoudre cette équation.
La résolution d'une telle équation ne peut se faire que par approximations, et c'est Geogebra qui fait le travail.

La détermination du centre O connaissant α est alors un jeu d'enfant .
La longueur de cet arc est $L=\frac{\alpha}{\sin\alpha}$

La variable libre est la position x du centre d'un des deux segments, et on calcule alors l'autre pour que la somme des deux aires soit S (paramètre)
On fait tracer par Geogebra la courbe longueur en fonction de x, avec S comme paramètre, pour estimer son minimum.

Le résultat final est que :

Si S est inférieure à π/4, aire du disque de diamètre 1, alors le minimum de la longueur est pour les deux segments égaux (équilibrés) Si S est supérieure à π/4, alors les deux segments sont les segments complémentaires sur une corde de 1 d'un même disque d'aire S (déséquilibre surprenant), tant que on n'atteint pas les points bleus, c'est à dire S < π/2



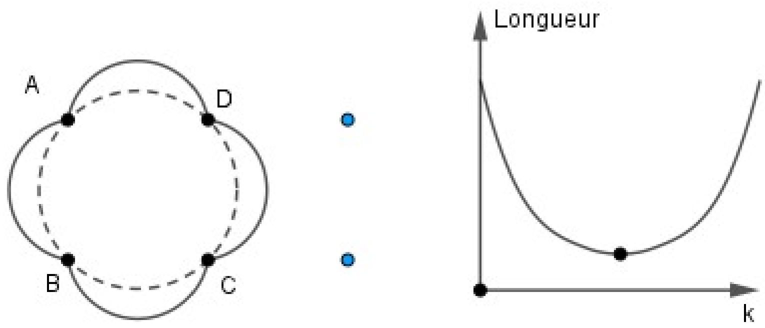
Cela peut se comprendre si on se rappelle que le minimum de longueur est pour un cercle
Avec la contrainte des points A et B, cela « ressemble le plus à un cercle », **<u>si possible un cercle</u>**

Répartition entre les deux paires d'arcs

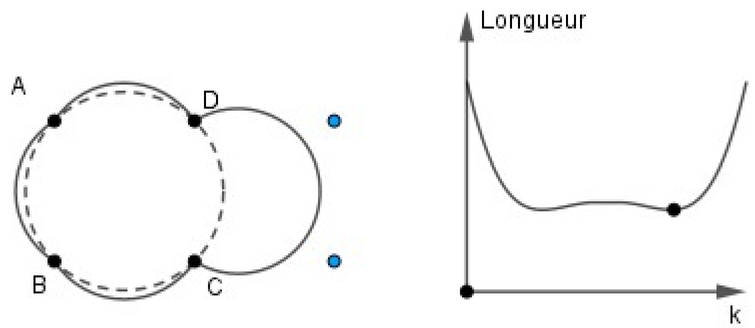
On utilise alors le résultat précédent car pour chaque paire d'arcs celui-ci s'applique.
On retire du calcul l'aire du carré, constante, et on ne s'intéresse qu'à l'aire des 4 segments, groupés par paires, une paire aura en tout l'aire S et l'autre l'aire S'. L'aire de la figure est S+S'+1.

Pour chaque valeur de St = S+S', on construit les deux paires d'arcs de S et de S' d'après le résultat précédent, en fonction de la répartition k = S/St, pour obtenir la courbe de L totale en fonction de k, et déterminer quelle est la répartition optimale.

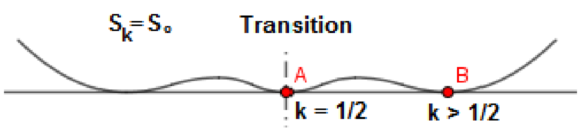
En dessous d'une certaine valeur S_0 de St, la courbe L(k) a un seul minimum pour k = 1/2 (répartition symétrique) et les éventuels minima locaux > ce minimum.

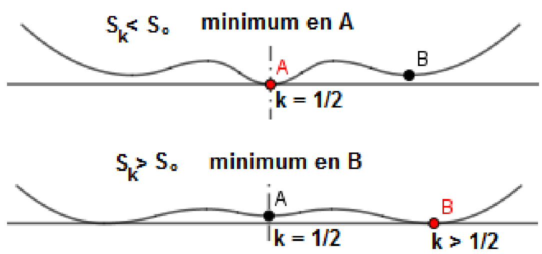


Au delà de S_0 on a deux minima pour des valeurs k_m et $1-k_m$ variables selon la valeur de St (répartition dissymétrique), éventuellement avec encore un minimum local pour k = 0.5 (voir zoom)



Les trois «petits» arcs sont égaux, Lors de la transition les arcs égaux se «dégonflent» brusquement au profit de l'un d'eux qui se gonfle brusquement. En effet à ce moment on a trois minimas de même valeur et on saute brusquement du minimum (A) pour k = 0.5 de l'ancienne configuration au minimum (B) pour k ≠ 0.5 de la nouvelle. Une figure zoomée énormément :





On observe tout de même que les arcs restent toujours « sur-gonflés » de sorte que la configuration intuitive avec trois arcs « normaux » (partie d'un cercle circonscrit au carré) n'a jamais lieu avant d'atteindre les points bleus et l'apparition de 2 arcs supplémentaires avec changement de configuration pour St = $\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}$ (on a retire le carré du calcul, l'aire de la figure est St + 1)

Calcul de l'aire de transition

Le calcul exact de cette aire $S_0 + 1$ semble hors de portée, ou pour le moins bien compliqué, car pas de formule explicite pour la résolution de l'équation [1].
Par essai sous Geogebra, elle est voisine de 2.417

En raisonnant sur les 3 petits arcs, comme ils sont interchangeables, il devraient être égaux.
C'est bien ce qu'on observe et cela va permettre de calculer S_0 par approximations.
En effet on cherche à comparer le minimum en A pour les 4 arcs égaux, au minimum en B avec 3 arcs égaux pouvant chacun compléter un cercle avec le grand.
On cherche donc 4 arcs, tous de même rayon R :
un d'aire S_1 et les trois autres chacun d'aire S_2, avec $S_1 + 3S_2 = S$ (sauf le carré d'aire 1)
et $S_1 + S_2 = \pi R^2$

Appelons comme précédemment α le demi angle au centre du petit arc, et $R = \frac{1}{2\sin\alpha}$

L'aire du petit arc est comme précédemment $S_2 = \frac{\alpha}{(2\sin\alpha)^2} - \frac{1}{4\tan\alpha}$

Avec $S = S_1 + 3S_2 = (S_1 + S_2) + 2S_2 = \pi R^2 + 2S_2 = \frac{\pi}{(2\sin\alpha)^2} + 2S_2$

$$S = \frac{2\alpha + \pi}{(2\sin\alpha)^2} - \frac{1}{2\tan\alpha} \quad \text{[eq. 2]}$$

On est donc amené à résoudre cette équation comme la précédente.
Puis calculer et comparer les longueurs

ce qui permet d'obtenir par une simple dichotome « à la main » sur S

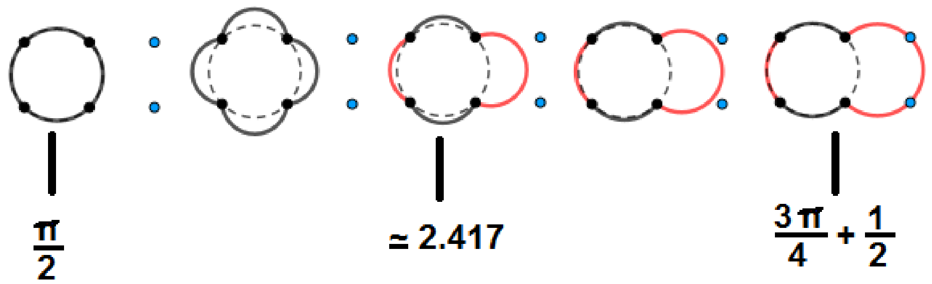
$$\mathbf{S_0 + 1 \approx 2.41741845}$$

(on ne peut pas aller beaucoup plus loin dans la précision que quelques 10^{-6} avec Geogebra quand il s'agit de calculs approchés.)

Conclusions

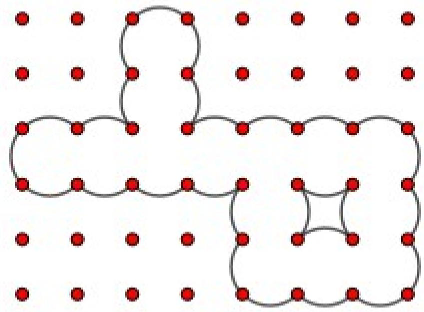
Dans cette configuration l'aire de la figure varie entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}$

Tant que l'aire est < 2.417,les 4 arcs sont égaux et se gonflent progressivement et équitablement.
A ce moment (aire ≈ 2.417) la configuration change brusquement, 3 arcs égaux se dégonflant au profit du 4ème.
L'inflation se poursuit alors progressivement sur le gros arc, les trois autres continuant à se **dégonfler**, jusqu'à ce que le gros arc atteigne les points bleus, à l'aire $\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}$ où les trois petits arcs sont « normalisés » à leur minimum sur le cercle circonscrit au carré.



Et ensuite ...

Une fois que le contour a atteint les points bleus, on poursuit l'inflation, d'abord sur les 6 arcs, puis sur 8 arcs etc au fur et à mesure qu'on atteint de nouveaux points.
La chaîne de cellules peut être linéaire, pliée ou ramifiée à aire et périmètre constant.



Voire comporter des cycles, mais en refermant une chaîne, l'aire et surtout le **nombre même de cellules** / arcs change.

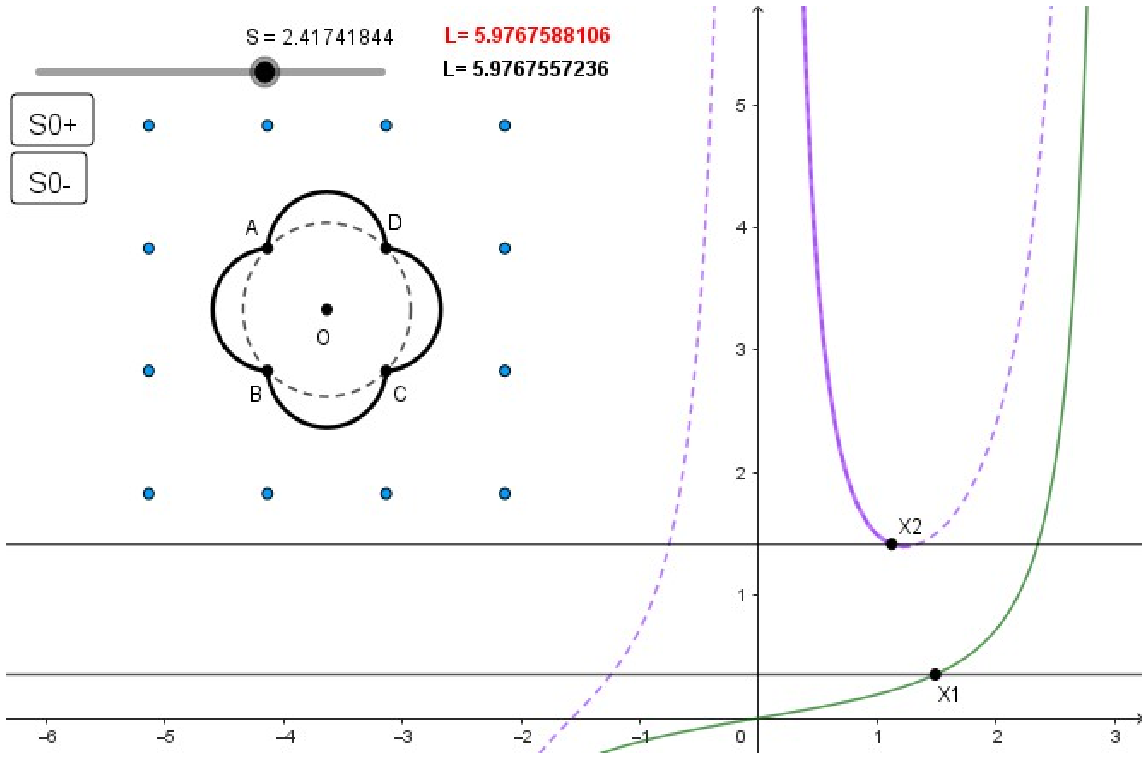
L'étude pourrait sans doute se faire de même, par regroupement des arcs par paires etc ...
mais la répartition sur plus de deux paires d'arcs sera bien plus délicate.

On peut simplifier en supposant que toutes les paires d'arcs supplémentaires se comportent de la même façon. et seraient considérées comme une seule paire d'arcs dupliquée en n-1 exemplaires pour 2n arcs, seule une paire étant éventuellement différente des autres
Cela revient à changer le coefficient de S_2 dans $S=S_1+(n-1)S_2=(S_1+S_2)+(n-2)S_2$

On garantirait ainsi à peu de frais un « presque minimum » pour le périmètre.
Une difficulté supplémentaire apparaît lorsque (dès que possible) la chaîne de cellules obtenues peut se refermer en un cycle, vu que le nombre de cellules change. (et de façon contraire à l'intuition)
Mais nous arrêtons là cette étude.

Annexe

Copies d'écran Geogebra montrant les fonctions utilisées pour résoudre les équations 1 et 2 ainsi que les valeurs de L..
Une fois juste avant S0 → les arcs noirs symétriques,.



une fois juste après S0 → les arcs rouges dissymétriques