Quels sont les entiers relatifs x, y, z pour lesquels $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=1$?

1. Commençons par chercher les solutions positives :

   $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=1$ avec $x \geq 2, y \geq 3$ et $z \geq 4$.

   • Si $z=4$ alors $x=\dfrac{4y}{y-8}$ et $y=\dfrac{8x}{x-4}$ donc $x \geq 5$ et $y \geq 9$.

   On note que y diminue quand x grandit , on fait donc croître x à partir de 5 tant qu'il reste inférieur à y puis on fait décroître y jusqu'à 9 . On ne conserve que les solutions dans $\mathbb{N}$. On obtient la liste suivante :

   $(5,40,4),(6,24,4),(8,16,4),(12,12,4),(20,10,4),(36,9,4).$

   On procède de même avec $z=5$ et $z=6$:

   $(3,30,5),(5,10,5),(15,6,5),(3,12,6),(4,8,6),(6,6,6),(10,5,6).$

   • On continue en fixant $y \leq 6$ et en faisant varier x puis z :

   $(4,3,36),(6,3,18),(12,3,12),(30,3,10).$
   $(3,4,18),(4,4,12),(5,4,10),(6,4,9),(8,4,8),(14,4,7).$
   $(2,5,30),(10,5,6).$
   $(2,6,18),(3,6,9),(6,6,6).$

   • Puis on fixe x :

   $(2,5,30),(2,6,18),(2,7,14),(2,8,12),(2,10,10),(2,12,9),(2,16,8),(2,28,7).$
   $(3,4,18),(3,6,9),(3,12,6),(3,30,5).$
   $(4,3,36),(4,4,12),(4,8,6).$
   $(5,4,10),(5,10,5),(5,40,4).$
   $(6,3,18),(6,4,9),(6,6,6),(6,24,4).$

   Il y a bien sûr des répétitions dans ces listes mais nous avons toutes les solutions positives car x, y et z ne peuvent pas être simultanément supérieurs à 6 . Pour la suite nous remplacerons les valeurs négatives des inconnues par leurs opposées en adaptant l'équation initiale . Par exemple si on veut les solutions $x>0, y>0$ et $z<0$ de l'équation initiale , on cherchera les solutions naturelles de $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1$.

2. Maintenant on va résoudre $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1+\frac{3}{z}$ en entiers naturels .

   On rappelle que cela revient à chercher des solutions naturelles à l'équation initiale avec $x>0, y>0$ et $z<0$.

   • Si $x=1$ alors $2z=3y$ fournit une infinité de solutions .

   Pour l'équation originale : $(1,2k,-3k)$ avec k entier naturel .

   • Si $x=2$ alors $z=\dfrac{6y}{4-y}$ donc $y\leq 3$ et trois nouvelles solutions :

   $(2,1,-2),(2,2,-6),(2,3,-18)$.

   • Si $y=1$ alors $\frac{1}{x}+1=\frac{3}{z}$ donc $z=2$, une solution : $(2,1,-2)$.

   • Si $y=2$ alors $z=3x$ donne aussi une infinité de solutions :

   $(k,2,-3k)$ avec k entier naturel .

   • Si $x\geq 3$ et $y\geq 3$ alors $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\leq 1$ donc pas de solution .

3. Deuxième possibilité : $\frac{1}{x}+\frac{3}{z}=1+\frac{2}{y}$.

   • Si $x=1$ alors $2z=3y$, une infinité de solutions .

   $(1,-2k,3k)$ avec k entier naturel .

   • Si $x=2$ alors $y=\dfrac{4z}{6-z}$ donc $z\leq 5$.

   Quatre solutions : $(2,-2,2),(2,-4,3),(2,-8,4),(2,-20,5)$.

   • Si $z=1$ alors $x=\dfrac{y}{2-2y}$ ce qui est impossible .

   • Si $z=2$ alors $x=\dfrac{2y}{4-y}$, deux solutions : $(2,-2,2),(6,-3,2)$.

- Si $z = 3$ alors $y = 2x$ avec une infinité de solutions :

  $(k, -2k, 3)$ avec k entier naturel .

- Si $z = 4$ alors $y = \dfrac{8x}{4-x}$, deux solutions : $(2, -8, 4), (3, -24, 4)$.
- Si $z = 5$ alors $y = \dfrac{10x}{5-2x}$ qui donne une solution : $(2, -20, 5)$.
- Si $x \geq 3$ et $z \geq 6$, il n'y a clairement pas de solution .

4. Troisième possibilité : $\dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{z} = 1 + \dfrac{1}{x}$.

   - Si $y = 2$ alors $z = 3x$: $(-k, 2, 3k)$ avec k entier naturel .
   - Si $y = 3$ alors $x = \dfrac{3z}{9-z}$, deux solutions : $(-6, 3, 6), (-24, 3, 8)$.
   - Si $y = 4$ alors $x = \dfrac{2z}{6-z}$, deux solutions : $(-1, 4, 2), (-2, 4, 3)$.
   - Si $y = 5$ il n'y a pas de solution .
   - Si $y = 6$ alors $x = \dfrac{3z}{9-2z}$, deux solutions : $(-3, 6, 3), (-12, 6, 4)$.
   - Si $z = 2$ alors $x = 1$ et $y = 4$, une solution $(-1, 4, 2)$.
   - Si $z = 3$ alors $y = 2x$, $(-k, 2k, 3)$ avec k entier naturel .
   - Si $z = 4$ alors $x = \dfrac{4y}{8-y}$, trois solutions : $(-4, 4, 4), (-12, 6, 4), (-28, 7, 4)$.
   - Si $z = 5$ alors $x = \dfrac{5y}{10-2y}$, $y = 4$ et $x = 10$: $(-10, 4, 5)$.
   - Si $z = 6$ alors $x = \dfrac{2y}{4-y}$, deux solutions : $(-2, 2, 6), (-6, 3, 6)$.
   - Si $y \geq 6$ et $z \geq 6$, il n'y a clairement pas de solution .

5. Quatrième possibilité : $\dfrac{2}{y} = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{z}$.

   On a $y = 1$ et $x = \dfrac{z}{z-3}$, alors x décroit vers 1 quand z augmente .

On trouve deux solutions : $(-4,1,-4),(-2,1,-6)$.

6. Cinquième et dernière possibilité : $\dfrac{3}{z}=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}z$.

   Il n'y a que deux valeurs possibles pour z :

   • $z=1$ et alors $x=1$, $y=2$: $(-1,-2,1)$.

   • $z=2$, alors $x=\dfrac{2y}{y-4}$ et x décroit vers 2 quand y croît .

     Quatre solutions :$(-10,-5,2),(-6,-6,2),(-4,-8,2),(-3,-12,2)$.

Pour résumer , il y a trois types de solutions :

1. Les solutions positives :

   $(2,5,30),(2,6,18),(2,7,14),(2,8,12),(2,10,10),(2,12,9),(2,16,8),(2,28,7),$
   $(3,4,18),(3,6,9),(3,12,6),(3,30,5),(4,3,36),(4,4,12),(4,8,6),(5,4,10),(5,10,5),$
   $(5,40,4),(6,3,18),(6,4,9),(6,6,6),(6,24,4),(8,4,8),(8,16,4),(10,5,6),(12,3,12),$
   $(12,12,4),(14,4,7),(15,6,5),(20,10,4),(30,3,10),(36,9,4)$.

2. Les branches infinies :

   $(1,2k,-3k),(k,2,-3k),(k,-2k,3)$ avec k entier relatif .

3. Les solutions mixtes :

   $(-28,7,4),(-24,3,8),(-12,6,4),(-10,-5,2),(-10,4,5),(-6,-6,2),(-6,3,6),$
   $(-4,-8,2),(-4,1,-4),(-4,4,4),(-3,-12,2),(-3,6,3),(-2,1,-6),(-2,2,6),$
   $(-1,-2,1),(-1,4,2),(2,-20,5),(2,-8,4),(2,-4,3),(2,-2,2),(2,1,-2),(2,-2,2),$
   $(2,2,-6),(2,3,-18),(3,-24,4),(6,-3,2)$.