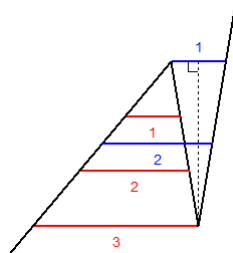


On appelle corde d'une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, tout segment joignant deux points de son graphe, parallèle à l'axe des abscisses et de longueur entière. Une de ces fonctions admet une corde de longueur 2025, combien admet-elle de cordes au minimum ?

On peut trouver en trouver une avec $2025 + 2024 = 4049$ cordes. On illustre avec une fonction admettant une corde de longueur 3, le principe restant le même pour une longueur 2025.



Il reste à montrer qu'on ne peut pas faire pire.

Démontrons le résultat en partant d'une fonction f admettant une corde de longueur 9, on procéderait de même avec une longueur 2025.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on définit $g_k(x) = f(k+x) - f(x)$.

Comme f a une corde de longueur 9, la fonction g_9 s'annule pour un x que l'on peut supposer égal à 1, c'est à dire $g_9(1) = 0$.

Directement ① $g_k(1) + g_{9-k}(k+1) = g_k(10-k) + g_{9-k}(1) = g_9(1) = 0$.

Un peu moins évident ② $\sum_{i=1}^{10-k} g_k(i) = \sum_{i=2}^k g_{9-k}(i)$ pour $1 \leq k \leq 9$.

On le vérifie en développant les deux membres par exemple pour $k = 3$:

A gauche : $g_3(1) + g_3(2) + \dots + g_3(7) = f(8) + f(9) - f(2) - f(3)$.

A droite : $g_6(2) + g_6(3) = f(8) + f(9) - f(2) - f(3)$.

Comme f admet un nombre fini de cordes, g_1 ne s'annule qu'un nombre fini de fois et garde un signe constant au voisinage de $\pm\infty$. Supposons par l'absurde que le signe de $g_1(x)$ ne soit pas le même aux deux extrêmes. Pour k assez grand g_k ne change jamais de signe sur $\mathbb{R}$ tout entier et comme

$g_k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} g_1(x+i)$, il y a clairement une contradiction . On peut supposer sans problème que $g_1(x)$ et donc $g_k(x)$ reste positif quand $|x|$ devient grand .

Nous allons montrer que pour chaque entier $1 \leq k \leq 4$ les fonctions g_k et g_{9-k} admettent au moins 4 zéros à elles deux ce qui signifie que la fonction f admet au moins quatre cordes de longueur k ou $9-k$.

Si g_k et g_{9-k} prennent toutes les deux des valeurs strictement négatives alors on a deux cordes de longueur k et deux cordes de longueur $9-k$, c'est bon . Sinon , au moins l'une des deux fonctions ne prend que des valeurs positives et par symétrie on peut supposer qu'il s'agit de g_k , envisageons quatre cas :

- $g_k(1) = 0$ et $g_k(10-k) = 0$.

D'après ① , $g_{9-k}(1) = g_{9-k}(k+1) = 0$, nous avons nos quatre cordes .

- $g_k(1) > 0$ et $g_k(10-k) > 0$.

D'après ① , $g_{9-k}(1) < 0$ et $g_{9-k}(k+1) < 0$. D'autre part ② nous indique qu'il existe un entier $1 < i < k+1$ avec $g_{9-k}(i) > 0$ donc g_{9-k} s'annule quatre fois .

- $g_k(1) > 0$ et $g_k(10-k) = 0$.

Toujours d'après ① , $g_{9-k}(1) = 0$ et $g_{9-k}(k+1) < 0$. D'autre part ② nous indique qu'il existe un entier $1 < i < k+1$ pour lequel $g_{9-k}(i) > 0$. Comme $g_{9-k}(x)$ est positif pour $|x|$ grand , g_{9-k} s'annule au moins trois fois et avec g_k qui s'annule en $10-k$, on a nos quatre cordes .

- $g_k(1) = 0$ et $g_k(10-k) > 0$.

Il y a encore quatre cordes avec un raisonnement identique .

On obtient alors 4×4 cordes plus la corde initiale de longueur 9 ce qui nous donne bien les 17 cordes souhaitées .

Remarque :

Pour une corde de longueur n impaire , il y a au minimum $2n-1$ cordes . Le résultat perdure si $n = 2p$ pair en remarquant que $g_p(1) + g_p(p+1) = 0$.