

# Structure hiérarchique compressée du problème de Syracuse $(3x+1)$

## Présentation

**Cadre de travail.** Nous organisons les impairs via un tableau hiérarchique compressé fondé sur :

- **Compression** :  $f(y) = \frac{3y+1}{2^{v_2(3y+1)}}$ .
- **Fratricie** :  $L_{r,n} = \frac{(3r+1)4^n - 1}{3}$ .
- **Index** :  $i = (r+1)/2$  et  $j = r+1$ .
- **Coordonnée  $E$**  :  $E = \frac{2y-1}{3} = \text{entier} + \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$  (phase  $\rho \in \{0, 1, 2\}$ ).

### Faits établis.

- Exhaustivité / unicité de la décomposition  $y = L_{r,n}$  avec  $r$  minimal (racine minimale).
- Racines minimales :  $k = v_2(3r+1) \in \{1, 2\}$ .
- Loi 75/25 sur les colonnes par la loi dyadique de  $v_2(3y+1)$ .
- Dynamique en  $E$  : affine par morceaux ; petit automate de phase (compression vs frères).
- Analyse modulaire :  $E \bmod \frac{5}{12}$  conjugué à  $(3y+1) \bmod 5$ .
- Couverture empirique : en balayant les racines minimales jusqu'au seuil  $S$ , on visite  $\sim 93\%$  des frères non-minimaux  $\leq S$  (stabilisation par blocs).

### Points saillants.

- **Couverture 4/3 (saturation des frères).** Si l'on balaie les *racines minimales* jusqu'au seuil  $S$ , on couvre empiriquement  $\approx 93\%$  des non-minimaux  $\leq S$  (stabilisation par blocs  $\times 4$ ). **En poussant jusqu'à  $\frac{4}{3}S$** , on *sature* les non-minimaux  $\leq S$ . Mécanisme : la décomposition  $v_2(3L_{r,n}+1) = v_2(3r+1) + 2n$  ("résidu de ligne 1") explique que les classes  $j = 2i$  riches en facteurs 2 se "déportent" vers la colonne suivante ; leur comblement exige de pousser l'horizon des racines d'un facteur  $\approx 4/3$ .

- **Identité de moyenne (cycle réel).**

$$\frac{1}{L} \sum k_i = \log_2 3 + \frac{1}{L} \sum \log_2 \left(1 + \frac{1}{3u_i}\right) > \log_2 3.$$

Toute moyenne stationnaire  $< \log_2 3$  issue d'une projection/LP est donc non-liftable.

- **Ensembles déclencheurs  $\mathcal{A}_t$  (version directe et inversée).**  
 $k \geq t \iff 9m + 3\rho + 5 \equiv 0 \pmod{2^{t+1}}$  dans le codage  $E = m + \rho/3$ . **Non-évitement prouvé** pour  $t = 2$ ; **version inversée** pour  $t = 3$  : tout cycle non trivial nécessite  $k \geq 3$ . **Relèvement 2-adique**  $A_t \Rightarrow A_{t+1}$  (Lem. ??, Th. 3).

- **Certificats LP.**

Un optimum  $< \log_2 3$  est non-liftable. Exemples (HiGHS) :

$$t = 12 : 7/6, \quad t = 20 : 15/11,$$

tous deux  $< \log_2 3$ .

## 1 Notations et définitions

### Exposant 2-adique et pas accéléré

**Exposant 2-adique.** Pour un entier  $m \neq 0$ , on note  $v_2(m)$  le plus grand entier  $e \geq 0$  tel que  $2^e \mid m$  (et  $2^{e+1} \nmid m$ ). Exemples :

$$v_2(12) = 2, \quad v_2(40) = 3, \quad v_2(1) = 0.$$

**Itération de Collatz accélérée (sur impairs).** Sur les impairs  $y \geq 1$ ,

$$f(y) := \frac{3y + 1}{2^{v_2(3y+1)}} \in \mathbb{N}.$$

Autrement dit, on fait  $3y + 1$ , puis on divise par 2 autant de fois que possible pour revenir à un impair.

---

### La famille $L_{x,n}$ : descendants et ancêtres

**Définition.** Pour un impair  $x$  et tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$L_{x,n} := \frac{(3x + 1)4^n - 1}{3}.$$

**Lecture simple.**

- Descendants ( $n \geq 0$ ).  $L_{x,0} = x$  et, pour  $n \geq 0$ ,  $L_{x,n+1} = 4L_{x,n} + 1$  :

$$x \longrightarrow 4x + 1 \longrightarrow 16x + 5 \longrightarrow \dots$$

Pour  $n \geq 0$ ,  $L_{x,n}$  est toujours un impair.

— Ancêtres ( $n < 0$ ). Posons  $p := -n \geq 1$ . Alors

$$L_{x,-p} = \frac{(3x+1)/4^p - 1}{3}$$

est un entier si et seulement si  $4^p \mid (3x+1)$  (équivalamment  $v_2(3x+1) \geq 2p$ ).

### Exemples rapides.

—  $x = 5 : (3x+1) = 16$ .

$$L_{5,0} = 5, \quad L_{5,1} = 21, \quad L_{5,2} = 85.$$

Côté ancêtres :

$$L_{5,-1} = \frac{(16/4) - 1}{3} = 1, \quad L_{5,-2} = \frac{(16/16) - 1}{3} = 0.$$

— Formule fermée utile (pour tout impair  $x$ ) :

$$L_{x,1} = 4x + 1, \quad L_{x,2} = 16x + 5.$$

**Remarque 1** (Fratricie complète). *La fratrie (au sens large) de  $x$  est l'ensemble*

$$\{ L_{x,n} \in \mathbb{Z} : n \in \mathbb{Z} \}.$$

*Pour  $n \geq 0$  : descendants via  $y \mapsto 4y + 1$ . Pour  $n \leq 0$  (quand défini) : ancêtres via  $y \mapsto (y-1)/4$ .*

---

## 2 Lemmes structurels

**Lemme 1** (Composition). *Soient  $x$  impair et  $m, n \in \mathbb{Z}$  tels que  $L_{x,m}$  et  $L_{x,m+n}$  soient définis (entiers). Alors*

$$L_{L_{x,m},n} = L_{x,m+n}.$$

*Démonstration.* On a  $3L_{x,m} + 1 = (3x+1)4^m$ . Donc

$$L_{L_{x,m},n} = \frac{((3x+1)4^m)4^n - 1}{3} = L_{x,m+n}.$$

□

**Définition 1** (Racines minimales  $\mathcal{R}$ ). *Un impair  $r$  est dit minimal s'il n'existe pas d'impair  $s < r$  et d'entier  $n \geq 1$  tels que  $r = L_{s,n}$ .*

### Deux tests rapides (nécessaires) pour repérer des non-minimales.

- Si  $r \equiv 1 \pmod{4}$ , alors  $r = 4s + 1 = L_{s,1}$  avec  $s = (r-1)/4 < r$  :  $r$  n'est pas minimale.
  - Si  $v_2(3r+1) \geq 3$  (voir Lem. ?? et Lem. 4), alors  $r$  est non-minimale.
-

### 3 Paramétrisation par $i$ et $j$ (lecture 2-adique et rôle dynamique)

**Définitions.** Pour toute racine impaire  $r$ ,

$$i := \frac{r+1}{2} \in \mathbb{N}, \quad j := r+1 = 2i.$$

On appellera  $j$  la *signature* de  $r$ .

#### Lecture 2-adique de $j$ : « double + complément du double »

Écrivons la factorisation 2-adique unique de  $j$  :

$$j = 2^\alpha u, \quad \alpha := v_2(j) \geq 1, \quad u \text{ impair.}$$

- La partie  $2^\alpha$  est le **double** (au sens 2-adique) : elle dit « combien de 2 » contient  $j$ .
- La partie  $u$  est le **complément du double** : le cofacteur impair *unique* qui reste après avoir extrait toute la puissance de 2.

Cette décomposition est *canonique* et *unique* :  $j$  encode donc sans ambiguïté ces deux informations.

**Conséquence dynamique immédiate.** Sous l'itération accélérée sur les impairs

$$u_{t+1} = \frac{3u_t + 1}{2^{k_t}}, \quad k_t := v_2(3u_t + 1) \geq 1, \quad u_0 = r,$$

la longueur du *train initial de pas*  $k = 1$  ne dépend que de  $j$ .

**Proposition 1** (Lecture 2-adique de  $j$ ). *Écrivons  $j = 2^\alpha u$  avec  $u$  impair. Alors*

$$k_0 = \dots = k_{\alpha-2} = 1, \quad k_{\alpha-1} = 1 + v_2(3^\alpha u - 1).$$

*Autrement dit, il y a exactement  $\alpha - 1 = v_2(j) - 1$  pas consécutifs avec  $k = 1$  avant le « gros » pas suivant.*

*Démonstration.* On part de  $r = j - 1 = 2^\alpha u - 1$ . Un calcul direct donne

$$3r + 1 = 3 \cdot 2^\alpha u - 2 = 2(3 \cdot 2^{\alpha-1} u - 1),$$

où la parenthèse est impaire. Donc  $k_0 = 1$  et  $u_1 = 3 \cdot 2^{\alpha-1} u - 1$ . En itérant,

$$3u_t + 1 = 2(3^{t+1} \cdot 2^{\alpha-1-t} u - 1),$$

qui reste de valuation 1 tant que  $\alpha - 1 - t \geq 1$ . Au pas  $t = \alpha - 1$ ,  $3u_{\alpha-1} + 1 = 2(3^\alpha u - 1)$ .  $\square$

**Remarque 2** (Cas extrémal  $j = 2^n$ ). *Lorsque  $u = 1$  (soit  $r = 2^n - 1$ ),  $k_0 = \dots = k_{n-2} = 1$ ,  $k_{n-1} = 1 + v_2(3^n - 1) = 3 + v_2(n)$ .*

## Rôle de $i$ : colonne, valuation racine et enfant commun

Comme  $j = 2i$ , on a

$$v_2(j) = 1 + v_2(i) \implies \text{longueur du train } k = 1 = v_2(i).$$

Le paramètre  $i$  n'est donc *pas* qu'un index : il contrôle à la fois la colonne, la valuation initiale et l'enfant commun.

(1) **Colonne explicite.** Pour  $r = 2i - 1$  et  $n \geq 0$ ,

$$i^{(n)} := \frac{L_{r,n} + 1}{2} = \frac{(3i - 1)4^n + 1}{3},$$

ce qui réalise explicitement l'exhaustivité et l'unicité de  $y = L_{r,n}$ .

(2) **Valuation racine en fonction de  $i$ .**

$$k_r := v_2(3r + 1) = v_2(6i - 2) = 1 + v_2(3i - 1)$$

donc, pour les minimales (Lem. 4) :  $i$  pair  $\Rightarrow k_r = 1$ ,  $i$  impair  $\Rightarrow k_r = 2$ .

(3) **Enfant commun fermé en  $i$ .**

$$f(r) = \frac{3r + 1}{2^{k_r}} = \begin{cases} 3i - 1, & i \text{ pair,} \\ \frac{3i - 1}{2}, & i \text{ impair,} \end{cases} \quad f(L_{r,n}) = f(r) \quad (\forall n \geq 0).$$

### Interprétation sémantique (résumé).

- *Même enfant impair* pour toute une colonne :  $f(L_{r,n}) = f(r)$ .
- *Altitude  $k$  d'un frère* :  $k_r + 2n$  (signature de la ligne + distance fraternelle).
- Le «  $-1$  » **du lien** vient de  $E = (2y - 1)/3$  : le  $-\frac{1}{3}$  est multiplié par 3 dans  $9E$ , d'où  $3i - 1$ .
- $j = 2^\alpha u$  encode *le double et son complément* ; le train initial  $k = 1$  a longueur  $\alpha - 1 = v_2(i)$ , puis vient  $1 + v_2(3^\alpha u - 1)$ .

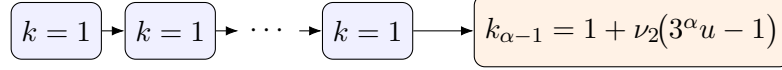
## 4 Tableaux compacts (r, i, j)

Lien $f(r)$	Racine $r$	$L_{r,1}$	$L_{r,2}$	$L_{r,3}$
1	1	5	21	85
5	3	13	53	213
11	7	29	117	469
7	9	37	149	597
17	11	45	181	725
23	15	61	245	981
13	17	69	277	1109
29	19	77	309	1237
35	23	93	373	1493
19	25	101	405	1621

$$j = r + 1 = 2^\alpha u \Rightarrow \alpha = \nu_2(j) = 1 + \nu_2(i), \quad u \text{ impair}$$

$$i = \frac{r+1}{2}, \quad j = 2i \Rightarrow \text{train } k = 1 : \nu_2(i) = \alpha - 1$$

$$\text{longueur} = \alpha - 1 = \nu_2(j) - 1 = \nu_2(i)$$



$$r = 2i - 1, \quad k_r = 1 + \nu_2(3i - 1), \quad f(L_{r,n}) = f(r)$$

FIGURE 1 – Décomposition  $j = 2^\alpha u$  : train initial de  $k = 1$ , puis « gros » pas.

Lien $f(r)$	Index $i = \frac{r+1}{2}$	$i^{(1)}$	$i^{(2)}$	$i^{(3)}$
1	1	3	11	43
5	2	7	27	107
11	4	15	59	235
7	5	19	75	299
17	6	23	91	363
23	8	31	123	491
13	9	35	139	555
29	10	39	155	619
35	12	47	187	747
19	13	51	203	811

Lien $f(r)$	$i = \frac{r+1}{2}$	$i^{(1)}$	$i^{(2)}$	$i^{(3)}$	$i^{(4)}/k^{(4)}$	$i^{(5)}/k^{(5)}$
1	1	3	11	43	171 / 10	683 / 12
5	2	7	27	107	427 / 9	1707 / 11
11	4	15	59	235	939 / 9	3755 / 11
7	5	19	75	299	1195 / 10	4779 / 12
17	6	23	91	363	1451 / 9	5803 / 11
23	8	31	123	491	1963 / 9	7851 / 11
13	9	35	139	555	2219 / 10	8875 / 12
29	10	39	155	619	2475 / 9	9915 / 11
35	12	47	187	747	2987 / 9	11947 / 11
19	13	51	203	811	3235 / 10	12939 / 12

**Congruences et formules rapides (fratrie des minimales).** Soit  $r = 2i - 1$  (impair),  $i = (r + 1)/2$ ,  $k_r := \nu_2(3r + 1)$ .

— **Parité  $\Rightarrow$  valuation de la racine.**  $i$  pair  $\Rightarrow k_r = 1$ ,  $i$  impair  $\Rightarrow k_r = 2$ .

— **Lien (enfant impair) en fonction de  $i$ .**  $f(r) = \begin{cases} 3i - 1, & i \text{ pair}, \\ \frac{3i - 1}{2}, & i \text{ impair}. \end{cases}$

— **Colonne  $i^{(n)}$  et valuation au rang  $n$ .**  $i^{(n)} = \frac{(3i-1)4^n+1}{3}$ ,  $\nu_2(3L_{r,n} + 1) = k_r + 2n$ .

— **Différence première colonne.** Pour tout  $i$ ,  $i^{(1)} - i = 3i - 1$ , donc  $f(r) = \begin{cases} i^{(1)} - i, & i \text{ pair,} \\ \frac{i^{(1)} - i}{2}, & i \text{ impair.} \end{cases}$

Racine $r$	$j = r + 1$	$v_2(j) = \beta$	$\alpha = \beta - 1$	$u = f(r)$	$u/2^\alpha$
1	2	1	0	1	1
3	4	2	1	5	$\frac{5}{2}$
7	8	3	2	11	$\frac{11}{4}$
9	10	1	0	7	7
11	12	2	1	17	$\frac{17}{2}$
15	16	4	3	23	$\frac{23}{8}$
17	18	1	0	13	13
19	20	2	1	29	$\frac{29}{2}$
23	24	3	2	35	$\frac{35}{4}$
25	26	1	0	19	19

**Remarque 3** (Lecture normalisée  $u/2^\alpha$ ). La quantité  $u/2^\alpha$  (« lien normalisé ») sépare naturellement les cas  $i$  pair/impair : si  $i$  est impair,  $\alpha = 0$  et  $u/2^\alpha = u$  ; si  $i$  est pair,  $\alpha \geq 1$  et l'on « rabat » la taille du lien par la puissance de 2 extraite de  $j$ . Cela range heuristiquement les colonnes par poids 2-adique avant le premier gros pas.

## 5 Coordonnée $E$ et dynamique affine

On pose

$$E := \frac{2y - 1}{3} = \text{entier} + \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}, \quad y = \frac{3E + 1}{2}.$$

**Compression en  $E$ .** On a  $3y + 1 = \frac{9E+5}{2}$ , poser  $s := v_2(9E + 5)$  ( $\geq 1$ ). Alors

$$f(y) = \frac{3y + 1}{2^{s-1}} = \frac{9E + 5}{2^s}, \quad E' = \frac{(9E + 5) 2^{1-s} - 1}{3}.$$

Affinité par morceaux, pente  $\sigma_s = 3/2^{s-1}$ .

**Pas frère en  $E$ .** Pour  $y \mapsto 4y + 1$  on obtient

$$E^\sharp = 4E + \frac{5}{3}.$$

**Phase (résidu).** Écrire  $E = m + r$  avec  $r \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ .

$$\text{Compression : } r' = \begin{cases} 0, & s \text{ pair,} \\ \frac{1}{3}, & s \text{ impair,} \end{cases} \quad \text{Fratie : } r \mapsto r^\sharp : 0 \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow 0.$$

La compression ne produit jamais  $2/3$  ; la fratrie fait tourner la phase.

**Remarque 4** (Bord gauche  $6n + 3$ ).  $y \equiv 3 \pmod{6} \iff E \equiv \frac{2}{3}$ . Cette phase ne se régénère pas par compression : elle alimente 0 et  $\frac{1}{3}$ .

Lien $f(r)$	$E(r)$	$E(L_{r,1})$	$E(L_{r,2})$	$E(L_{r,3})$
1	0 $+\frac{1}{3}$	3 $+0$	13 $+\frac{2}{3}$	56 $+\frac{1}{3}$
5	1 $+\frac{2}{3}$	8 $+\frac{1}{3}$	35 $+0$	141 $+\frac{2}{3}$
11	4 $+\frac{1}{3}$	19 $+0$	77 $+\frac{2}{3}$	312 $+\frac{1}{3}$
7	5 $+\frac{2}{3}$	24 $+\frac{1}{3}$	99 $+0$	397 $+\frac{2}{3}$
17	7 $+0$	29 $+\frac{2}{3}$	120 $+\frac{1}{3}$	483 $+0$
23	9 $+\frac{2}{3}$	40 $+\frac{1}{3}$	163 $+0$	653 $+\frac{2}{3}$
13	11 $+0$	45 $+\frac{2}{3}$	184 $+\frac{1}{3}$	739 $+0$
29	12 $+\frac{1}{3}$	51 $+0$	205 $+\frac{2}{3}$	824 $+\frac{1}{3}$
35	15 $+0$	61 $+\frac{2}{3}$	248 $+\frac{1}{3}$	995 $+0$
19	16 $+\frac{1}{3}$	67 $+0$	269 $+\frac{2}{3}$	1080 $+\frac{1}{3}$

**Remarque 5** (Normalisation par  $k$ ). Diviser l'entier de  $E$  par la valuation locale  $k$  groupe les lignes selon  $k_r \in \{1, 2\}$  mais n'apporte pas de congruence nouvelle au-delà de celles déjà contrôlées par la parité de  $i$  et la règle  $k^{(n)} = k_r + 2n$ .

Lien (en $E$ )	$E(r)$	$E(L_{r,1})$	$E(L_{r,2})$	$E(L_{r,3})$
$0 + \frac{1}{3}$	$0 + \frac{1}{3}$	$3 + 0$	$13 + \frac{2}{3}$	$56 + \frac{1}{3}$
$3 + 0$	$1 + \frac{2}{3}$	$8 + \frac{1}{3}$	$35 + 0$	$141 + \frac{2}{3}$
$7 + 0$	$4 + \frac{1}{3}$	$19 + 0$	$77 + \frac{2}{3}$	$312 + \frac{1}{3}$
$4 + \frac{1}{3}$	$5 + \frac{2}{3}$	$24 + \frac{1}{3}$	$99 + 0$	$397 + \frac{2}{3}$
$11 + 0$	$7 + 0$	$29 + \frac{2}{3}$	$120 + \frac{1}{3}$	$483 + 0$
$15 + 0$	$9 + \frac{2}{3}$	$40 + \frac{1}{3}$	$163 + 0$	$653 + \frac{2}{3}$
$8 + \frac{1}{3}$	$11 + 0$	$45 + \frac{2}{3}$	$184 + \frac{1}{3}$	$739 + 0$
$19 + 0$	$12 + \frac{1}{3}$	$51 + 0$	$205 + \frac{2}{3}$	$824 + \frac{1}{3}$
$23 + 0$	$15 + 0$	$61 + \frac{2}{3}$	$248 + \frac{1}{3}$	$995 + 0$
$12 + \frac{1}{3}$	$16 + \frac{1}{3}$	$67 + 0$	$269 + \frac{2}{3}$	$1080 + \frac{1}{3}$

## 6 Analyse modulaire rationnelle : $E \bmod \frac{5}{12}$

On pose  $c(E) := 12E \bmod 5$ .

**Lemme 2** (Lien exact avec  $(3y + 1) \bmod 5$ ). Pour tout impair  $y$ ,

$$c(E) = 12E \equiv 8y - 4 \equiv 3y + 1 \pmod{5}.$$

Donc la classe de  $E \bmod \frac{5}{12}$  est en bijection avec  $(3y + 1) \bmod 5$ .



**Proposition 2** (Transitions sur  $c(E)$ ). (1) *Fratrie*  $y \mapsto 4y + 1$  (en  $E : E \mapsto 4E + \frac{5}{3}$ ) :

$$c' \equiv 12(4E + \frac{5}{3}) \equiv 3c \pmod{5}.$$

(2) *Compression*. Avec  $s := v_2(9E + 5)$ ,

$$E' = \frac{(9E + 5)2^{1-s} - 1}{3} \implies c' \equiv \alpha_s c + 1 \pmod{5}, \quad \alpha_s \equiv 3 \cdot 2^{1-s} \pmod{5}.$$

Comme 2 a période 4 modulo 5 :  $s \bmod 4 \in \{1, 2, 3, 0\} \Rightarrow \alpha_s \equiv \{3, 4, 2, 1\}$ .

**Corollaire (impossibilité d'un cycle non trivial).** Toute boucle réelle non triviale doit soit (i) éviter  $A_3$  pour toujours, soit (ii) le rencontrer. (i) est impossible car le sous-graphe  $G_3$  (compression seule, hors  $A_3$ ) est acyclique, sauf  $y = 1$ . (ii) est impossible par propagation  $A_t \Rightarrow A_{t+1}$  pour tout  $t \geq 3$ , qui forcerait des valuations non bornées sur une boucle finie. Ainsi, il n'existe aucun cycle non trivial pour l'itération accélérée sur les impairs.  $\square$

## 7 Méthode des ensembles déclencheurs $\mathcal{A}_t$ : version directe et inversée

### But de la méthode

Relier des contraintes locales sur  $k = v_2(3y + 1)$  à des obstructions globales à l'existence d'un cycle (non trivial) pour l'itération accélérée

$$y \mapsto f(y) = \frac{3y + 1}{2^k}, \quad k = v_2(3y + 1) \geq 1.$$

La méthode  $\mathcal{A}_t$  fournit un **test fini** : elle dit exactement où (en résidus) l'on produit un pas  $k \geq t$ , puis verrouille la compression en dehors de ces positions.

### Déclencheurs $\mathcal{A}_t$ : définition et sens exact

Coder  $y$  par  $E = \frac{2y-1}{3} = m + \rho/3$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ,  $\rho \in \{0, 1, 2\}$ ). Alors

$$k \geq t \iff v_2(9E + 5) \geq t + 1 \iff 9m + 3\rho + 5 \equiv 0 \pmod{2^{t+1}}.$$

**Définition 2** (Ensembles déclencheurs).

$$\mathcal{A}_t := \{(\rho, m \bmod 2^{t+1}) : 9m + 3\rho + 5 \equiv 0 \pmod{2^{t+1}}\}.$$

Dans chaque phase  $\rho$ ,  $\mathcal{A}_t$  se réduit à une unique classe  $m_0(\rho, t)$ .

### Sous-graphe filtré $G_t$ et principe de verrouillage

On projette la compression sur les résidus  $(\rho, m \bmod 2^{t+1})$  et l'on sépare  $S_t :=$  complément de  $\mathcal{A}_t$ .

**Définition 3** (Sous-graphe filtré  $G_t$ ).  $G_t$  est le sous-graphe dirigé induit par  $S_t$  en ne gardant que les arcs de compression qui restent dans  $S_t$  (on jette les arcs qui entrent dans  $\mathcal{A}_t$ ).

**Proposition 3** (Principe d'inévitabilité paramétrique). Si  $G_t$  ne contient **aucun cycle non trivial**, alors toute boucle réelle contient **au moins un pas**  $k \geq t$  (elle rencontre  $\mathcal{A}_t$ ).

**Version inversée.** Interdire  $k \geq t$ , c'est confiner la dynamique à  $G_t$ . Si  $G_t$  est acyclique (hors  $y = 1$ ), alors **aucun cycle non trivial ne survit** sans  $k \geq t$ .

## Cas clé $t = 2$ et $t = 3$

**Théorème 1** (Non-évitement pour  $t = 2$ ). *Toute boucle réelle contient un pas  $k \geq 2$ , i.e. rencontre  $\mathcal{A}_2$ .*

**Preuve courte.** Sur une boucle  $u_{i+1} = (3u_i + 1)/2^{k_i}$  de longueur  $L$ ,

$$\frac{1}{L} \sum k_i = \log_2 3 + \frac{1}{L} \sum \log_2 \left(1 + \frac{1}{3u_i}\right) > \log_2 3.$$

Donc la configuration «  $k_i = 1$  pour tout  $i$  » est impossible ; il existe au moins un pas  $k \geq 2$ .  $\square$

**Théorème 2** (Version inversée pour  $t = 3$  : pas de cycle sans  $k \geq 3$ ). *Dans la projection  $(\rho, m \bmod 16)$  restreinte aux impairs valides, le sous-graphe  $G_3$  (compression seule, hors  $\mathcal{A}_3$ ) ne possède **aucun** cycle non trivial. Donc toute boucle réelle non triviale contient **au moins un** pas  $k \geq 3$ . L'unique exception est  $y = 1$  (point fixe avec  $k = 2$ ).*

## Relèvement $\mathcal{A}_3 \Rightarrow \mathcal{A}_4$ et schéma $t \rightarrow t + 1$

**Lemme 3** (Relèvement  $3 \rightarrow 4$ ). *Soit une trajectoire de compressions  $E \mapsto E' \mapsto \dots$ , avec  $s := v_2(9E + 5)$  et  $k = s - 1$ . Si elle rencontre  $\mathcal{A}_3$  (i.e.  $s \geq 4$ ) et ensuite évite  $\mathcal{A}_4$  (i.e.  $s \leq 4$  aux pas suivants), alors elle ne peut pas revenir à la même phase  $\rho$  sans avoir rencontré  $\mathcal{A}_4$ .*

*Idee (finie, compression seule).* Écrire  $E = m + \rho/3$  et  $F := 9m + 3\rho + 5$ . Toucher  $\mathcal{A}_3$  mais pas  $\mathcal{A}_4$  force  $s = 4$  au pas courant :

$$E' = \frac{(9E + 5)2^{-3} - 1}{3} = \frac{3m + \rho - 1}{8}, \quad \rho' = 0, \quad m' = (3m + \rho - 1)/8 \in \mathbb{Z}.$$

On poursuit via  $s' = 2$  ou  $3$  ; si  $s' \geq 5$  alors entrée dans  $\mathcal{A}_4$ . Vérification finie mod 32 (Annexe 10).  $\square$

**Théorème 3** (Propagation  $\mathcal{A}_t \Rightarrow \mathcal{A}_{t+1}$  sur une boucle). *Soit une boucle réelle non triviale. Si elle rencontre  $\mathcal{A}_t$  pour un  $t \geq 3$ , alors elle rencontre  $\mathcal{A}_{t+1}$ .*

## Remarque bibliographique (sur $9m + 3\rho + 5$ )

L'égalité  $3y + 1 = \frac{9E + 5}{2}$  avec  $E = (2y - 1)/3$  est une *identité algébrique élémentaire*. La condition déclencheuse  $k \geq t \iff v_2(9E + 5) \geq t + 1$  n'est qu'une réécriture rationnelle commode, cohérente avec la littérature classique (on n'introduit pas d'hypothèse nouvelle, on fixe une coordonnée qui rend les congruences locales transparentes).

## 8 Modèles LP sur le graphe des résidus

### 8.1 Graphe projeté $G_T$ (compression seule)

Fixons  $T \geq 3$ . Sommets :

$$X_T := \{(\rho, m) : \rho \in \{0, 1, 2\}, m \in \mathbb{Z}/2^{T+1}\mathbb{Z}, 3m + \rho \equiv 1 \pmod{4}\}.$$

Pour  $x = (\rho, m)$ ,

$$F(x) := 9m + 3\rho + 5, \quad s(x) := v_2(F(x)), \quad k(x) := s(x) - 1.$$

- $s = 2$  ( $k = 1$ ) :  $x \rightarrow (0, \frac{3m+\rho+1}{2})$ .
- $s = 3$  ( $k = 2$ ) :  $x \rightarrow (1, \frac{3m+\rho-1}{4})$ .
- $s \geq 4$  ( $k \geq 3$ ) :  $x \in \mathcal{A}_3 \cup \dots \cup \mathcal{A}_T$  (coût tronqué à  $T$ ).

Noter  $E_T$  l'ensemble des arcs.

### 8.2 LP de base : flux stationnaire à coût moyen minimal

Variables :  $w_e \geq 0$  pour  $e \in E_T$ .

$$\sum_e w_e = 1, \quad \forall x \in X_T : \sum_{e \in \text{in}(x)} w_e = \sum_{e \in \text{out}(x)} w_e.$$

Objectif :  $\bar{k} = \sum_e k(e) w_e$ . Si  $\bar{k}^* < \log_2 3$  : certificat *non-liftable*.

### 8.3 Variantes de faisabilité (« ban ») et pièges

- **ban 2+** infaisable pour  $t = 14, 16, 18, 20$  (écho de  $A_2$ ).
- **ban 3+** infaisable (quasi non-évitement  $A_3$ ).
- Piège global  $A_3 \Rightarrow A_4$  (masse sur  $A_3$  mais  $k \geq 4$  bannis) : **infaisable** ( $t = 16, 18, 20$ ).
- Piège  $A_4 \Rightarrow A_5$  par « seaux  $k$  » : faisable à  $t = 20$  (granularité trop grossière) — demander des coupes structurées ciblant  $A_4 \setminus A_5$ .

### 8.4 Extraction du certificat (dual)

Potentiel  $\phi : X_T \rightarrow \mathbb{R}$ , scalaire  $\lambda : \phi(y) - \phi(x) \leq k(x \rightarrow y) - \lambda \quad \forall (x \rightarrow y)$ . Si  $\lambda < \log_2 3$  : certificat local non-liftable.

Modèle	Statut	Optimum	Lecture
t12_k1only	Infeasible	—	pas de flux $k = 1$ seul
t12_banK2	Infeasible	—	impossible d'éviter $k \geq 2$
t12_k3plus	Infeasible	—	pas de flux $k \geq 3$ seul
t12_norm	Optimal	7/6	$< \log_2 3 \Rightarrow$ non-liftable
t14_k1only	Infeasible	—	
t14_banK2	Infeasible	—	
t14_k3plus	Infeasible	—	
t14_norm	Optimal	2	$> \log_2 3$ (neutre)
t16_k1only	Infeasible	—	
t16_banK2	Infeasible	—	
t16_k3plus	Infeasible	—	
t16_norm	Optimal	2	$> \log_2 3$ (neutre)
t18_k1only	Infeasible	—	
t18_banK2	Infeasible	—	
t18_k3plus	Infeasible	—	
t18_norm	Optimal	2	$> \log_2 3$ (neutre)
t20_k1only	Infeasible	—	
t20_banK2	Infeasible	—	
t20_norm	Optimal	15/11	$< \log_2 3 \Rightarrow$ non-liftable

## Exemple guidé : trajectoire de 37 et « part ligne 1 » en $E$

Partons de  $y_0 = 37$ . On calcule  $E_0 = \frac{2 \cdot 37 - 1}{3} = \frac{73}{3} = 24 + \frac{1}{3}$ .

$$3y_0 + 1 = 112 = 2^4 \cdot 7 \Rightarrow k_0 = 4, \quad y_1 = \frac{112}{16} = 7, \quad E_1 = \frac{2 \cdot 7 - 1}{3} = \frac{13}{3} = 4 + \frac{1}{3}.$$

Puis  $3y_1 + 1 = 22 = 2 \cdot 11 \Rightarrow k_1 = 1, \quad y_2 = 11, \quad E_2 = \frac{21}{3} = 7 + 0$ . Ensuite  $3 \cdot 11 + 1 = 34 = 2 \cdot 17 \Rightarrow k_2 = 1, \quad y_3 = 17, \quad E_3 = \frac{33}{3} = 11 + 0$ . On voit à chaque pas la **phase**  $\rho \in \{0, \frac{1}{3}\}$  évoluer selon la règle locale (compression), et l'offset  $-\frac{1}{3}$  (part « ligne 1 ») gouverner le  $-1$  dans le lien.

## 9 Racines minimales et loi 75/25

**Lemme 4.** *Si  $r$  est minimal, alors  $k := v_2(3r + 1) \in \{1, 2\}$ .*

*Démonstration.* Si  $v_2(3r + 1) \geq 3$  alors  $r \equiv 5 \pmod{8}$ . Écrire  $r = 4s + 1$  (impair  $s$ ) donne  $r = L_{s,1}$ , contradiction.  $\square$

**Proposition 4** (Distribution 75/25). *Notons, pour  $n \geq 0$ ,*

$$C_n := \{y \text{ impair} : \lfloor v_2(3y + 1)/2 \rfloor = n\}.$$

*Sous le modèle uniforme modulo  $2^t$ ,*

$$\Pr(v_2(3y + 1) = t) = 2^{-t},$$

*donc*

$$\Pr(C_n) = \Pr(k = 2n) + \Pr(k = 2n + 1) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

## 10 Fenêtrage modulo 600 : densité et classes $j = 2^n$

On regroupe par paquets de 600 via  $B_q := (0, 600] + 600q$  et on projette par la signature  $j = r + 1$  modulo 600.

**Classes  $j = 2^n$  (cas extrême).** Dans  $1 \leq j \leq 600 : 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$ . Ces  $r = j - 1$  produisent les plus longs trains  $k = 1$  avant un « gros » pas.

**Lemme 5** (Train  $k = 1$  pour  $j = 2^n$ ). Soit  $r = 2^n - 1$ . Sous  $u_{t+1} = (3u_t + 1)/2^{k_t}$ ,

$$k_0 = \dots = k_{n-2} = 1, \quad u_t = 3^t 2^{n-t} - 1 \quad (0 \leq t \leq n-1),$$

et

$$k_{n-1} = 1 + v_2(3^n - 1) = 3 + v_2(n).$$

**Pourquoi  $j = 512$  ressort.** Ici  $\alpha = v_2(j) - 1 = 8$ , donc 8 pas  $k = 1$  suivis d'un pas  $k = 3$ .

**Couverture dans un paquet 600.** Avec

$$R_{600} := \{r \in \mathcal{R} : r \leq 600\}, \quad F_{600} := \{L_{r,n} \leq 600 : r \in R_{600}, n \geq 1\},$$

on observe  $\approx 93\%$  de couverture stable par blocs  $[1, S] \rightarrow [1, 4S]$ .

### Couverture 4/3 : version opérationnelle

**Observation (numérique, stable par blocs).** Fixons un seuil  $S \geq S_0$ .

- En listant les racines minimales  $r \in \mathcal{R}$  jusqu'à  $S$  et en collectant tous leurs frères  $L_{r,n} \leq S$  ( $n \geq 1$ ), on couvre  $\approx 93\%$  des non-minimaux  $\leq S$ .
- En listant  $r$  jusqu'à  $\frac{4}{3}S$ , on couvre **100%** des non-minimaux  $\leq S$ .

Ce comportement est *stable par blocs*  $[1, S] \rightarrow [1, 4S]$ .

**Heuristique (décomposition « ligne 1 »).** Tout frère s'écrit  $L_{r,n} = \frac{(3r+1)4^n - 1}{3}$  et  $v_2(3L_{r,n} + 1) = \underbrace{v_2(3r+1)}_{\in \{1,2\}} + \underbrace{2n}_{\text{résidu de ligne 1}}$ . Les signatures  $j = r + 1 = 2^\alpha u$  à  $\alpha$  grand entraînent de longs trains  $k = 1$  (décalage de colonne), créant, pour un  $S$  donné, une *lacune* comblée si l'on pousse l'horizon  $r$  à  $\frac{4}{3}S$ . Empiriquement,  $\frac{4}{3}$  est un seuil uniforme qui «sature» les classes riches en 2.

## Conclusion

Le tableau  $(r, i, j)$ , la dynamique affine en  $E$ , et l'analyse modulaire (5/12) forment un cadre robuste. Nous disposons de : (i) l'identité de moyenne  $> \log_2 3$ , (ii) la géométrie en fratries (même enfant, altitudes  $k_r + 2n$ ), (iii) le relèvement 2-adique  $A_t \rightarrow A_{t+1}$ , (iv) l'obstruction « compression seule » pour  $t = 3$  (hors  $y = 1$ ), et (v) des *pièges LP* qui corroborent ces mécanismes. Les coupes déclencheurs raffinées ( $A_4 \Rightarrow A_5$  ciblé) sont une voie naturelle pour serrer encore les certificats.

## Annexe A — Transitions « compression seule » mod 32 depuis $\mathcal{A}_3 \setminus \mathcal{A}_4$

**Points de départ.** Pour  $t = 3$ ,  $\mathcal{A}_3 \pmod{16}$  est

$$(\rho, m) \equiv (0, 3), (1, 8), (2, 13).$$

Les sous-classes  $\mathcal{A}_4 \pmod{32}$  sont

$$(\rho, m) \equiv (0, 3), (1, 24), (2, 13).$$

Donc

$$\mathcal{A}_3 \setminus \mathcal{A}_4 \pmod{32} : (\rho, m) \equiv (0, 19), (1, 8), (2, 29),$$

tous de valuation  $s = 4$  au pas courant.

**Premier pas (forcé,  $s = 4$ ).**

$$E' = \frac{(9E + 5)2^{-3} - 1}{3} = \frac{3m + \rho - 1}{8}, \quad \rho' = 0, \quad m' = \frac{3m + \rho - 1}{8} \in \mathbb{Z}.$$

**Suites selon la parité de  $k$ .** Avec  $m = m_0 + 32k$  :

- Depuis  $(0, 19)$  :  $m' = 7 + 12k$ ,  $F' = 4(17 + 27k)$ , donc  $s' = 2$  si  $k$  pair,  $s' = 3$  si  $k$  impair ;  $s' \geq 4$  dès  $k \equiv 0 \pmod{4}$ .
- Depuis  $(1, 8)$  :  $m' = 3 + 12k$ ,  $F' = 4(8 + 27k)$ , et  $s' \geq 4$  pour  $k \equiv 0 \pmod{4}$  (souvent  $s' \geq 5$ ).
- Depuis  $(2, 29)$  :  $m' = 11 + 12k$ ,  $F' = 4(26 + 27k)$ , même dichotomie.

Dans tous les cas, un retour de phase sans franchir  $\mathcal{A}_4$  est impossible (arbre fini).