Collatz via une « grille collée » et un certificat min–moyenne sur les coutures

de *Pas de cycle* à *Atteint 1*

Résumé. Nous présentons un cadre fini et vérifiable en deux parties pour la dynamique impaire accélérée

$$T(y) = \frac{3y+1}{2^{\nu_2(3y+1)}}, \qquad y \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ impair.}$$

Partie I construit une *grille collée* avec deux mouvements atomiques par ligne (LH et SEAM) et prouve une simulation exacte en deux mouvements d'un pas impair ; un Lyapunov simple Ψ croît d'au moins 1 à chaque pas simulé, ce qui exclut tout cycle non trivial. *Partie II* définit l'*automate des coutures* fini Σ_b sur les résidus mod 3^b avec poids d'arête $w = \log_2(3) - \kappa$ pour des types de couture $\kappa \in \{1, 2\}$, prouve la valeur min–moyenne exacte $\mu^*(b) = \log_2(3) - 2 < 0$ pour tout b, puis en déduit une inégalité de bloc excluant la divergence. Ensemble, ces faits impliquent que les trajectoires impaires sont bornées et, en l'absence de cycles non triviaux, atteignent le point fixe $y = 1$.

1 Partie I — Simulation exacte et Lyapunov (pas de cycles)

Re-étiquetage et oddization. Tout impair y s'écrit $y = 2D - 1$ avec $D = \psi(y) := (y+1)/2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. On pose $\operatorname{oddize}(n) := n/2^{\nu_2(n)}$.

Deux nœuds par ligne D et deux mouvements. Pour chaque $D \geq 1$, on introduit un bord gauche $L(D)$ et un pivot $M(D)$.

LH

$L(D) \to M(D)$ (demi-bloc gauche).

SEAM

$M(D) \to L\big(\Sigma(D)\big)$, avec

$$\Sigma(D) = \frac{\operatorname{oddize}(3D-1)+1}{2} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

On projette un impair via $\Pi(y) := L(\psi(y)) = L(D)$.

Lemme 1.1 (Simulation exacte en deux mouvements)**.** *Pour tout impair $y = 2D - 1$,*

$$T(y) = \operatorname{oddize}(3D-1) \qquad \textit{et} \qquad \psi(T(y)) = \Sigma(D),$$

donc

$$\Pi\big(T(y)\big) = \operatorname{SEAM}\big(\operatorname{LH}(\Pi(y))\big).$$

Démonstration. On a $3y+1=6D-2=2(3D-1)$, d'où $T(y)=\mathrm{oddize}(3D-1)$ et

$$\psi(T(y))=\frac{T(y)+1}{2}=\frac{\mathrm{oddize}(3D-1)+1}{2}=\Sigma(D).$$

□

Un Lyapunov simple. Posons

$$\Psi=\sum(\text{longueurs de demi-blocs})-2\times(\#\text{coutures}),$$

avec $\Delta\Psi(\text{LH sur la ligne } D)=D+2>0$ et $\Delta\Psi(\text{SEAM})=-2$. Ainsi, pour un pas simulé (LH+SEAM),

$$\Delta\Psi=(D+2)-2=D\geq 1.$$

Théorème 1.2 (Pas de cycles non triviaux)**.** *La dynamique impaire T n'a pas de cycle dirigé non trivial. Le seul point fixe impair est $y=1$.*

Démonstration. Un cycle dans la dynamique impaire induit, par le Lemme 1.1, un cycle dans la grille. Or Ψ augmente d'au moins 1 à chaque pas simulé — impossible sur un cycle. Résoudre $T(y)=y$ donne $(2^k-3)y=1$ avec $k=\nu_2(3y+1)$; l'unique solution impaire est $y=1$ (avec $k=2$). □

2 Partie II — Automate des coutures et inégalité de bloc (pas de divergence)

Automate des coutures Σ_b et poids. Fixons $b\geq 1$. Les nœuds sont les résidus $r \bmod 3^b$. Une *couture* de type $\kappa\in\{1,2\}$ réalise la transition

$$r\mapsto r'\equiv(3r-1)\,(2^{\kappa})^{-1}\pmod{3^b},\tag{2.1}$$

avec le poids

$$w(r\to r')\;=\;\log_2(3)\;-\;\kappa.\tag{2.2}$$

(Les demi-blocs vivent dans la grille mais n'apparaissent pas dans Σ_b.)

Lemme 2.1 (Min–moyenne exacte pour tout b)**.** *Si $\mu^*(b)$ désigne la moyenne minimale sur les cycles de Σ_b, alors*

$$\mu^*(b)=\log_2(3)-2\in(-1,0)\qquad\textit{pour tout } b\geq 1.$$

Démonstration. Comme 2 est inversible modulo 3^b, en $r\equiv -1 \pmod{3^b}$ on a

$$r'\equiv(3r-1)\,(2^2)^{-1}\equiv(-4)\cdot 4^{-1}\equiv -1\pmod{3^b},$$

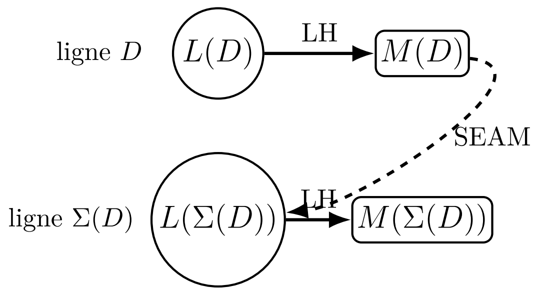

Figure 1 – Grille collée (LH + SEAM). Un pas impair : $L(D) \xrightarrow{\text{LH}} M(D) \xrightarrow{\text{SEAM}} L(\Sigma(D))$; $D = (y+1)/2$, $\Sigma(D) = (\text{oddize}(3D-1)+1)/2$. Avec $\Delta\Psi(\text{LH}) = D+2$ et $\Delta\Psi(\text{SEAM}) = -2$, chaque pas simulé augmente Ψ d'au moins $D \geq 1$.

d'où une boucle $\kappa = 2$ de poids $\log_2(3) - 2$; donc $\mu^*(b) \leq \log_2(3) - 2$. Toutes les arêtes ayant poids dans $\{\log_2(3) - 1,\ \log_2(3) - 2\}$, on a aussi $\mu^*(b) \geq \log_2(3) - 2$. Égalité. $\square$

Inégalité duale et estimation en bloc. Avec $h \equiv 0$, toute trajectoire dans Σ_b satisfait

$$\sum_{e \text{ sur la trajectoire}} \Big(w(e) - \mu^*(b)\Big) \ \geq\ 0.$$

Considérons un bloc de m pas impairs $y_0 \to \cdots \to y_m$, et posons

$$k_i := \nu_2(3y_i + 1) \geq 1, \qquad \delta_i := \log_2\!\left(1 + \tfrac{1}{3y_i}\right) \in (0,\ \log_2(4/3)].$$

Si S est le nombre total de coutures utilisées par la simulation exacte sur ces m pas, alors $\sum_{i=0}^{m-1} k_i = \sum_{\text{coutures}} \kappa$ et chaque pas a au moins une couture, donc $S \geq m$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m-1} \Delta \log_2 y_i &= \sum_{i=0}^{m-1} (\log_2 3 - k_i) + \sum_{i=0}^{m-1} \delta_i \\ &\leq\ m \log_2 3 - 2S + m \log_2(4/3) \ =\ 2m - 2S \ \leq\ 0.\end{aligned}$$

Proposition 2.2 (Pas de divergence)**.** *Pour tout* $m \geq 1$, *on a* $\log_2 y_m \leq \log_2 y_0$. *Les trajectoires impaires sont donc bornées supérieurement.*

Conclusion. Th. 1.2 (pas de cycles non triviaux) + Prop. 2.2 (bornitude) $\Rightarrow$ toute trajectoire impaire atteint finalement $y = 1$.

Annexe : « Size split »

Pour un pas impair $y \mapsto T(y) = (3y+1)/2^k$ avec $k = \nu_2(3y+1) \geq 1$,

$$\Delta \log_2 y = \log_2\!\left(\frac{3y+1}{2^k y}\right) = (\log_2 3 - k) + \delta(y), \qquad \delta(y) := \log_2\!\left(1 + \frac{1}{3y}\right) \in (0,\ \log_2(4/3)].$$

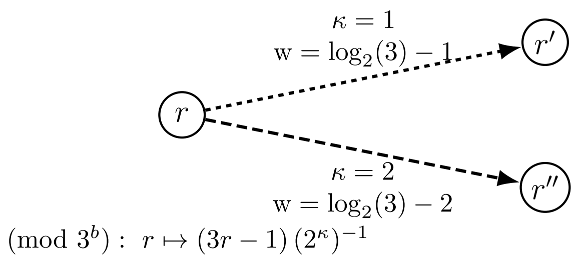

Figure 2 – Types de coutures et poids sur Σ_b. En $r \equiv -1 \pmod{3^b}$, boucle $\kappa = 2$ de poids $\log_2(3) - 2$, ce qui force $\mu^*(b) = \log_2(3) - 2$.