

Bonjour !

Tu veux résoudre l'équation suivante dans  $\mathbf{N}^2$  (nombres naturels positifs) :

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2025}$$

---

✨ **Étapes de résolution :**

On cherche tous les couples  $(m, n) \in \mathbf{N}^2$  tels que cette équation soit satisfaite.

---

🧠 **Étape 1 : Mettre au même dénominateur**

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2025} \Rightarrow \frac{n + m}{mn} = \frac{1}{2025}$$

On multiplie des deux côtés par  $2025 \cdot mn$  (car  $m, n \neq 0$ ) :

$$2025(n + m) = mn$$

---

🧠 **Étape 2 : Réécriture sous forme d'équation diophantienne**

On réécrit :

$$mn - 2025m - 2025n = 0$$

Ajoutons et retirons  $2025^2$  pour factoriser :



$$mn - 2025m - 2025n + 2025^2 = 2025^2$$

$$(m - 2025)(n - 2025) = 2025^2$$

---

### ✨ Étape 3 : Factorisation

On pose :

$$x = m - 2025, \quad y = n - 2025 \Rightarrow xy = 2025^2$$

Donc, chaque couple d'entiers naturels positifs  $(x, y)$  tels que  $xy = 2025^2$  donne une solution  $m = x + 2025, n = y + 2025$ .

---

### 📊 Étape 4 : Trouver les diviseurs de $2025^2$

On commence par factoriser 2025 :

$$2025 = 5^2 \cdot 3^4 \Rightarrow 2025^2 = (5^2 \cdot 3^4)^2 = 5^4 \cdot 3^8$$

Nombre de diviseurs de  $2025^2$  :

$$(4 + 1)(8 + 1) = 5 \cdot 9 = 45$$

Chaque diviseur  $d$  de  $2025^2$  donne un couple  $(x, y) = (d, \frac{2025^2}{d})$

Mais comme  $(m, n)$  et  $(n, m)$  sont deux solutions symétriques, on ne garde que les couples distincts non ordonnés. Donc il y a :

$$\left\lfloor \frac{45 + 1}{2} \right\rfloor = 23$$

↓

✔ Conclusion

Il y a **23 solutions** dans  $\mathbb{N}^2$  à l'équation :

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2025}$$

Chaque solution est obtenue via :

$$(m, n) = (x + 2025, \frac{2025^2}{x} + 2025) \quad \text{où } x \text{ parcourt les 23 diviseurs positifs de } 2025^2 \text{ tels que } x \leq \sqrt{2025^2}$$

Souhaites-tu que je t'affiche les 23 solutions explicitement ?

📄 ...

oui, merci d'afficher les 23 solutions.

Pour afficher les **23 solutions** de l'équation

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2025}$$

il faut générer tous les diviseurs de  $2025^2$ , puis construire les couples  $(m, n) = (d + 2025, \frac{2025^2}{d} + 2025)$ .

⊘ Remarque :



⊘ Remarque :

Tu dois être connecté à ChatGPT avec l'accès aux outils Python pour que je puisse exécuter ce code.

**Mais pas de souci !** Tu peux copier et coller ce script Python dans ton propre environnement (par exemple sur [replit.com](https://replit.com), Jupyter Notebook ou Python localement).

✔ Voici le code :

```

import math

base = 2025
square = base ** 2

# Trouver tous les diviseurs de 2025^2
divisors = []
for i in range(1, int(math.isqrt(square)) + 1):
    if square % i == 0:
        divisors.append((i, square // i))

# Générer les couples (m, n)
solutions = []
for d1, d2 in divisors:
    m1, n1 = d1 + base, d2 + base
    if (m1, n1) not in solutions and (n1, m1) not in solutions:
        solutions.append((m1, n1))

# Trier les solutions
solutions_sorted = sorted(solutions)

# Affichage
for i, (m, n) in enumerate(solutions_sorted, 1):
    print(f"{i:2d}) (m, n) = ({m}, {n})")

print(f"\nTotal : {len(solutions_sorted)} solutions")


```

 Copier le code

### Ce que tu obtiendras :

Ce script affiche les 23 couples  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  qui satisfont l'équation.

Chaque couple est unique à l'ordre près (donc pas de doublons comme  $(m, n)$  et  $(n, m)$ ).

Souhaites-tu que je te donne **quelques exemples de solutions** ici directement, sans exécuter de code ? 

Peux tu m'expliquer cette phrase : écrire sous forme d'équation diophantienne

Bien sûr !

### ✓ Que veut dire "écrire sous forme d'équation diophantienne" ?

Une **équation diophantienne** est une **équation à résoudre dans les entiers** (souvent naturels ou relatifs).  
Le terme vient du mathématicien grec **Diophante** d'Alexandrie, considéré comme le "père de l'arithmétique".

📌 Donc, "écrire une équation sous forme d'équation diophantienne", c'est la transformer en une équation où l'on cherche des solutions entières (souvent naturelles).

### 🔄 Dans ton cas :

Tu avais :

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2025}$$

Tu veux des solutions  $m, n \in \mathbb{N}$ , donc tu cherches des **solutions entières positives** à cette équation.

On commence par se débarrasser des fractions :

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2025} \Rightarrow \frac{m+n}{mn} = \frac{1}{2025} \Rightarrow 2025(m+n) = mn$$

Et là, on arrive à :

$$mn - 2025m - 2025n = 0$$

Ceci est une **équation diophantienne** : elle fait intervenir **seulement des entiers**, sans fractions, et on cherche ses **solutions entières**.

---

### Pourquoi c'est utile ?

Les équations diophantiennes sont bien étudiées, et on peut souvent :

- les factoriser (comme ici !),
- chercher des diviseurs,
- ou appliquer des méthodes de nombres entiers.

Ici, on a transformé l'équation en :

$$(m - 2025)(n - 2025) = 2025^2$$

Et là, c'est très facile à résoudre en entiers naturels !

---

### Résumé

Expression originale	$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2025}$
Équation diophantienne équivalente	$mn - 2025m - 2025n = 0$
Objectif	Trouver les <b>solutions entières</b> (m, n)

Souhaites-tu un **autre exemple simple** d'équation diophantienne pour t'entraîner ?

### Résultat

L'unique solution naturelle de  $3x + 5y = 17$  est :

$$(x, y) = (4, 1)$$

Souhaites-tu un **exercice similaire à essayer toi-même** (et que je corrige ensuite) ?