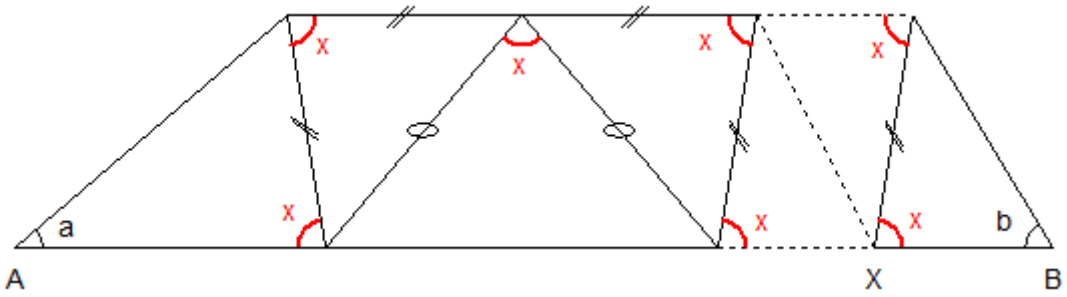
Pour un réel x de l'intervalle]0° ;180°[on dira qu'un polygone appartient à P(x) si on peut le partitionner en un nombre fini de triangles ayant tous un angle x .

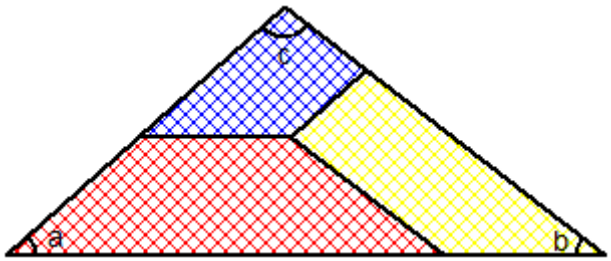
Résultat 1 : Si b est le plus grand angle à la base d'un trapèze alors ce dernier appartient à P(x) pour tout x < 180 – b .

Le résultat est clair si les bases sont suffisamment longues



Dans le cas contraire il suffit de découper le trapèze par des segments parallèles à la base afin d'obtenir des trapèzes semblables assez longs .

Résultat 2 : Si c est le plus grand angle d'un triangle alors ce dernier appartient à P(x) pour tout x < 180 - c .



C'est une simple conséquence du résultat 1 .

Résultat 3 : Tout triangle appartient à P(x) pour tout x dans]0° ;90°] .

Si x est un élément de l'intervalle donné , d'après la propriété 2 tout triangle rectangle appartient P(x) . Comme tout triangle peut toujours être partitionné en deux triangles rectangles en traçant la hauteur relative à la plus grande base , on conclut .

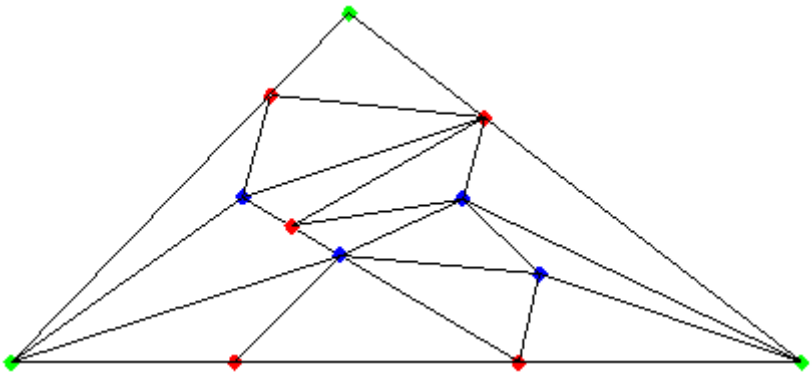
Résultat 4 : Tout triangle dont les angles sont strictement inférieurs à 120° appartient à P(120) .

Il suffit de relier chaque sommet du triangle à son point de Fermat .

Résultat 5 : Tout triangle dont les angles sont strictement inférieurs à 120° n'appartient pas à P(x) si x > 120 ° .

Supposons le contraire , on peut alors ranger les sommets des triangles en trois familles :

- Les sommets verts du triangle initial .
- Les sommets rouges à l'intérieur d'un côté d'un triangle .
- Les autres sommets bleus .



Si on note v , r et b le nombre de sommets de chaque couleur et n le nombre total de triangles on a :

180 + 180r + 360b=180n donc 2b + r + 1 = n .

On remarque qu'il ne peut pas y avoir d'angle x sur les sommets verts , pas plus d'un sur chaque sommet rouge et pas plus de deux sur chaque sommet bleu . Il y a donc au maximum 2b + r angles x or 2b + r = n - 1 < n , c'est impossible .

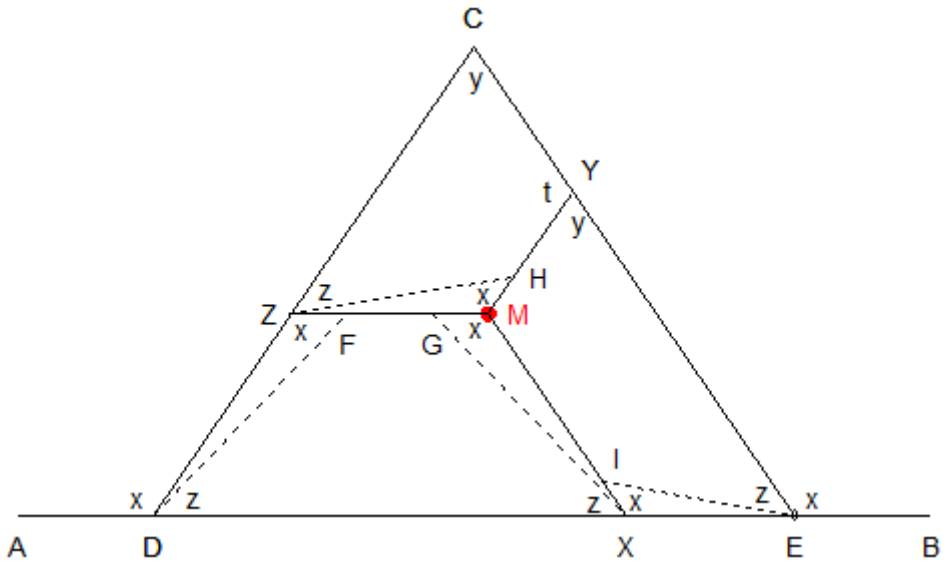
Parenthèse :

A contrario si un angle du triangle initial est supérieur à 120° , ce dernier ne pourrait appartenir à P(x) pour x > 120° que s'il y avait exactement un angle x au sommet du plus grand angle du triangle , exactement un angle x sur chaque sommet rouge et exactement deux sur chaque sommet bleu . Alors x devrait être supérieur ou égal au plus grand angle du triangle et il y aurait alors au moins deux autres angles sur chaque sommet rouge et au moins trois sur chaque sommet bleu . S'il était prouvé que chaque sommet bleu devrait accueillir au moins six angles , il serait établi que le triangle ne pourrait appartenir à P(x) avec x supérieur à 120° que si x était le plus grand angle du triangle .

Résultat 6 : Si x est dans] 90°, 120° [, tout triangle ayant un angle supérieur à x est dans P(x) .

Considérons un de ces triangles et construisons un triangle ayant les mêmes angles avec des triangles ayant tous un angle x . Notons y = 2x – 180 , z = 180 – x , t = 360 – 2x et u = 360 – 3x . On commence par construire un triangle CDE

d’angles y , z , z que l’on partage en trois trapèzes à l’aide d’un point M quelconque dans le triangle comme indiqué sur le dessin .



On place ensuite les points F , G , H et I sur les différentes parallèles avec des angles : FDZ = MXG = MZH = IEX = u . Le triangle CDE est alors partitionné en quatre triangles d’angles DFZ , MGX , MHZ et IEX d’angles x , y et u et en trois trapèzes isocèles YEIM , CYHZ et DXGF d’angles y et t . Les triangles appartiennent clairement à P(x) , les trapèzes aussi car y < 60 et par voie de conséquence le triangle CDE . Il n’y a plus qu’à placer les points A et B pour former un triangle ABC dans P(x) avec les angles voulus .