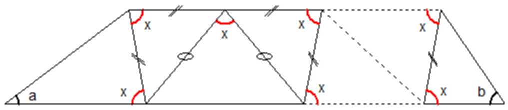
Pour quelles valeurs de x est-il possible de partitionner un triangle T en un nombre fini de triangles ayant tous un angle x ?

On note a, b et c les mesures croissantes des angles de T . Pour $x \in]0;180[$, on dira qu'un polygone appartient à $P(x)$ si on peut le partitionner en un nombre fini de triangles ayant tous un angle x .

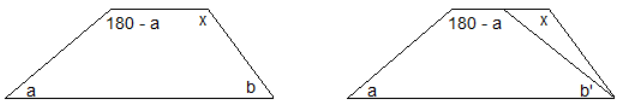
• Résultat 1 : Si b est le plus grand angle d'une base d'un trapèze alors ce dernier appartient à P(x) quand $x \leq 180 - b$.

Le résultat est clair quand $x < 180 - b$ et quand les bases du trapèze sont suffisament longues .



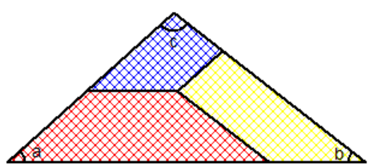
Si les bases du trapèze ne sont pas assez longues , on peut découper celui-ci parallélement aux bases de façon à ce que les différentes parts soient semblabes à un trapèze convenable . Il reste alors à partitionner chacune de parts avec des triangles d'angle x .

Pour l'inégalité large , si $x = 180 - b$, on a la figure suivante qui donnera alors une partition en angles x .



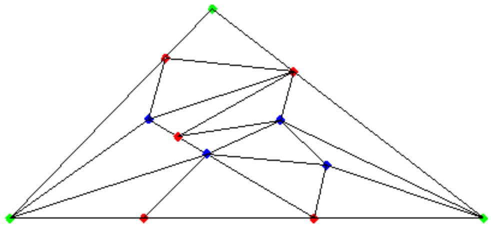
• Résultat 2 : $T \in P(x)$ pour tout $x \leq 180 - c$.

C'est une simple conséquence du résultat précédent :



• Résultat 3 : Si $120 < c < x$ alors $T \notin P(x)$.

Supposons par l'absurde qu'une telle partition existe . On classe les sommets des triangles en trois catégories , les verts qui sont sommets de T , les rouges à l'intérieur d'un côté d'un triangle et les bleus restants .



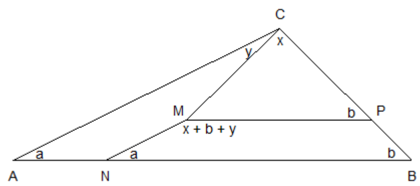
On note v, r et b le nombre de sommets de chaque couleur . Comme $x > c$, les sommets verts ne sont sommets d'aucun angle x , les rouges d'au plus un et les bleus d'au plus deux . Il y a donc au maximum $n = r+2b$ triangles dans la partition . La somme des angles des triangles vaut : $180+180r+360b = 180n$ donc $n = r+2b+1$. Contradiction .

• Résultat 4 : Si $x \leq 90$ alors $T \in P(x)$.

On partage T en deux triangles rectangles en traçant la hauteur relative à sa grande base . La propriété 2 permet de conclure .

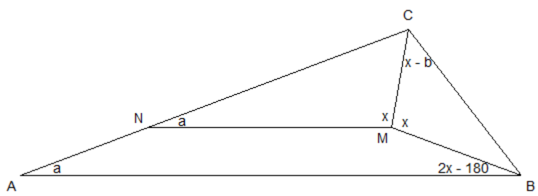
• Résultat 5 : Si $c \geq x \geq 90$ alors $T \in P(x)$.

On pose $y = c - x$, on utilise les résultats 1 et 3 sur la figure suivante :



• Résultat 6 : Si $c \leq 90 \leq x \leq 120$ alors $T \in P(x)$.

On utilise les résultats 1 et 3 sur la figure suivante :



• Conclusion : $T \in P(x) \Leftrightarrow x \leq \mathrm{Max}\{c, 120\}$.