Calculer la somme des solutions de l'équation :

$\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 3x\rfloor + \lfloor 4x\rfloor + \lfloor 5x\rfloor + \lfloor 6x\rfloor + \lfloor 7x\rfloor + \lfloor 8x\rfloor + \lfloor 9x\rfloor = 44x$.

On peut déjà noter que $x = m + \frac{n}{44}$ avec m et n entiers et $0 \le n \le 43$.

Alors pour tout entier $1 \le k \le 9$ on a $\lfloor kx\rfloor = km + \lfloor \frac{kn}{44} \rfloor$.

L'équation s'écrit alors : $\sum_{k=1}^{9} km + \sum_{k=1}^{9} \lfloor \frac{kn}{44} \rfloor = 44m + n$.

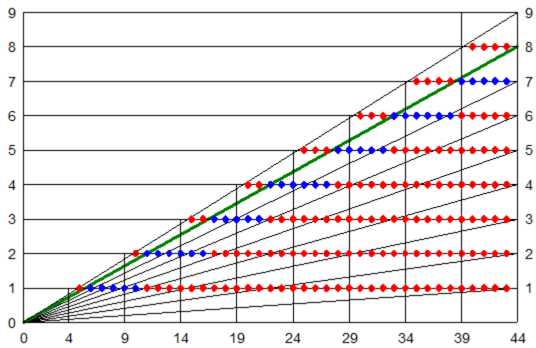
Ou encore : $m = n - \sum_{k=1}^{9} \lfloor \frac{kn}{44} \rfloor$.

A chaque valeur de n correspond une unique solution de l'équation initiale :

$x_n = n - \sum_{k=1}^{9} \lfloor \frac{kn}{44} \rfloor + \frac{n}{44} = \frac{45n}{44} - \sum_{k=1}^{9} \lfloor \frac{kn}{44} \rfloor$. On note S la somme des x_n .

$S = \sum_{n=0}^{43} \left(\frac{45n}{44} - \sum_{k=1}^{9} \lfloor \frac{kn}{44} \rfloor\right) = \frac{43 \times 45}{2} - \sum_{k=1}^{9} S_k$ avec $S_k = \sum_{n=0}^{43} \lfloor \frac{kn}{44} \rfloor$.

En fait S_k est la somme des ordonnées des points à coordonnées entières juste en dessous la droite d'équation $y = \frac{kx}{44}$ avec $0 \le x \le 43$.



Par exemple pour calculer S_8 , on ajoute les ordonnées des points en bleus :

$S_8 = 5 \times 7 + 6 \times 6 + 5 \times 5 + 6 \times 4 + 5 \times 3 + 6 \times 2 + 5 \times 1 = 152$.

$S = 0 + 0 + 22 + 43 + 66 + 86 + 108 + 129 + 152 + 172 = 778$.

La somme des racines de l'équation est donc égale à $967{,}5 - 778 = 189{,}5$.