

Je préfère garder les notations générales avec l'équation $\sum_{k=1}^n [kx] = dx$ où $d = \frac{n(n+1)}{2} - 1$

En posant $y = dx = qd + r$ avec $0 \leq r < d$ on montre qu'il y a exactement d solutions obtenues par $q = r - \sum_{k=1}^n [kr/d]$ en faisant varier r de 0 à $d - 1$.

En revenant à x on a donc pour la somme des solutions :

$$S = \sum x = \sum q + \frac{1}{d} \sum r = \frac{d+1}{d} \sum r - \sum_{k,r} [kr/d] = \frac{d^2-1}{2} - \sum_{k,r} [kr/d].$$

J'utilise ensuite l'astuce de changer r en $d - r$ pour obtenir :

$$2S = d^2 - 1 - \sum_{k,r} ([kr/d] + [k - kr/d])$$

On vérifie que $[t] + [-t] = -1$ sauf si t est un entier, la somme étant alors nulle.

On a donc $2S = d^2 - 1 - \sum_{k,r} (k - 1) - \text{card}\{(k, r) | d \text{ divise } kr\}$

D'où $2S = n(d - 1) - \text{card}\{(k, r) | d \text{ divise } kr\}$

En introduisant le PGCD de k et d on montre : $\text{card}\{(k, r) | d \text{ divise } kr\} = \sum_k (\text{PGCD}(k, d) - 1)$
d'où finalement :

$$2S = nd - \sum_{k=1}^n \text{PGCD}(k, d)$$