

Soient A_1, A_2, A_3 trois ensembles de même cardinal pair > 0 . Il existe un ensemble P dont l'intersection avec chacun des ensembles A_i est de cardinal 2.

Je note $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$, où $\epsilon_i \in \{0, 1\}$, l'ensemble des x de la réunion des A_i tels que $x \in A_i$ si et seulement si $\epsilon_i = 1$.

Si aucun des 011, 101, 110 n'est vide, on peut former P en prenant un élément dans chacun de ces ensembles. On suppose dans la suite 011 = $\emptyset$.

Si 001 est vide, alors $A_3 \subset A_1$ et donc $A_3 = A_1$. Dans ce cas on peut former P en prenant deux éléments dans $A_1 = A_3$ et le nombre qu'il faut dans $A_2 \setminus A_1$. On procède de manière analogue si 010 est vide. On suppose dans la suite que ni 001 ni 010 n'est vide.

Si 111 a au moins deux éléments, on peut former P en prenant deux éléments dans cet ensemble. On suppose dans la suite que 111 a 1 ou 0 élément.

1. Supposons 111 vide. On raisonne suivant la parité des cardinaux de 110 et 101.
 - (a) Si 110 et 101 ont tous les deux des cardinaux impairs, on forme P en prenant un élément dans chacun des deux, un dans 001 et un dans 010.
 - (b) Si l'un des deux, disons 110 a un cardinal impair et l'autre un cardinal pair, on forme P en prenant un élément dans 110, un dans 100 (de cardinal impair), un dans 010 (de cardinal impair) et deux dans 001 (de cardinal pair > 0).
 - (c) Si 110 et 101 ont tous les deux des cardinaux pairs, on forme P en prenant deux éléments dans A_1 , le nombre qu'il faut dans 010 et le nombre qu'il faut dans 001 (ces deux derniers de cardinaux pairs > 0).
2. Supposons que 111 a exactement un élément. On raisonne de nouveau suivant la parité des cardinaux de 110 et 101.
 - (a) Si 110 et 101 ont tous les deux des cardinaux impairs, on forme P en prenant deux éléments dans A_1 , le nombre qu'il faut dans 010 et le nombre qu'il faut dans 001 (ces deux derniers de cardinaux pairs > 0).
 - (b) Si l'un des deux, disons 110 a un cardinal impair et l'autre un cardinal pair, on forme P en prenant un élément dans 110, l'élément de 111 et un élément dans 001 (de cardinal impair).
 - (c) Si 110 et 101 ont tous les deux des cardinaux pairs, on forme P en prenant l'élément de 111, et un élément dans chacun des 100, 010, 001 (tous de cardinaux impairs).