

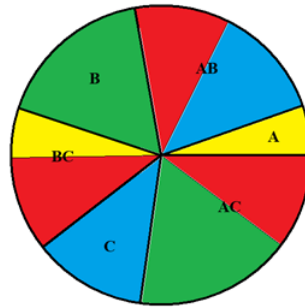
Soit A, B et C trois ensembles de cardinal 24 : $|A| = |B| = |C| = 24$. Montrer qu'on peut trouver un ensemble X tel que : $|A \cap X| = |B \cap X| = |C \cap X| = 12$.

On peut considérer que chacun des trois ensembles A, B, C est constitué de quatre parties disjointes éventuellement vides . Par exemple pour A :

$$A = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) .$$

La barre représentant un complémentaire . Notons ABC, AC, AB et A , ces quatre ensembles et supposons dans un premier temps que $ABC = \emptyset$.

On a alors le schéma suivant :



Soit j, b, v et r les cardinaux des parties jaunes , bleues , vertes et rouges .

On a $j + b + v + 2r = 24$ donc $j + b + v \geq 12$ ou $r \geq 6$.

- Si $j + b + v \geq 12$, on construit X avec six éléments de $A \cup B \cup C$ et six éléments dans la partie complémentaire . Par exemple , si on prend deux éléments dans A , on en prend deux dans BC .
- Si $r \geq 6$, on en choisit deux dans chaque secteur rouge .

Maintenant si ABC n'est pas vide , on construit X à partir de ABC en ajoutant des éléments comme dans le schéma précédent .