Suites

- Exercice 1 -

1. $t_{n+1} = w_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{5}(v_n + 4w_n) - \frac{1}{4}(v_n + 3w_n) = \frac{1}{20}(w_n - v_n) = \frac{1}{20}t_n$

La suite T est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{20}$ et de premier terme $t_0 = w_0 - v_0 = 38$.

On en déduit que : $t_n = 38 \times \left(\frac{1}{20}\right)^n$

2. Montrons que par récurrence que t_n est strictement positif, pour tout entier naturel n.
- au rang 0 : $t_0 = w_0 - v_0 = 40 - 2 = 38$
La propriété est donc vraie au rang 0.
- Supposons que la propriété soit vraie au rang n (c'est-à-dire que t_n soit strictement positif). Montrons qu'elle est encore vraie au rang $n + 1$:
$t_{n+1} = \frac{1}{20}t_n$.
Comme $t_n > 0$, alors $t_{n+1} > 0$.
La propriété est donc encore vraie au rang $n + 1$.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $t_n > 0$

a) $\star$ $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}(v_n + 3w_n) - v_n = -\frac{3}{4}v_n + \frac{3}{4}w_n = \frac{3}{4}(w_n - v_n) = \frac{3}{4}t_n$
Or, on a montré que $t_n > 0$ pour tout entier naturel n.
On en déduit donc que : $v_{n+1} - v_n > 0$ pour tout entier naturel n.
Donc : V est strictement croissante.

$\star$ $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{5}(v_n + 4w_n) - w_n = \frac{1}{5}v_n - \frac{1}{5}w_n = \frac{1}{5}(v_n - w_n) = -\frac{1}{5}t_n$
Or, on a montré que $t_n > 0$ pour tout entier naturel n.
On en déduit donc que : $w_{n+1} - w_n < 0$ pour tout entier naturel n.
Donc : W est strictement décroissante.

b) Comme $t_n > 0$ pour tout entier naturel n, alors :
$w_n - v_n > 0$ pour tout entier naturel n.
Comme V est strictement croissante, alors $v_0 < v_n$ pour tout entier naturel n, et W est strictement décroissante, alors $w_0 > w_n$ pour tout entier naturel n.
On a donc : $w_0 > w_n > v_n > v_0$

En particulier : $v_n < w_0$. Donc V est majorée par w_0.
$w_n > v_0$. Donc W est minorée par v_0.

c) On a montré que : $t_n = 38 \times \left(\frac{1}{20}\right)^n$.
Comme $\frac{1}{20} < 1$, alors $lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{20}\right)^n = 0$, donc : $lim_{n\to+\infty} t_n = 0$.
Or $t_n = w_n - v_n$, donc les suites W et V ont la même limite.

3. a) Pour tout entier naturel n,
$x_{n+1} = 4v_{n+1} + 15w_{n+1} = v_n + 3w_n + 3v_n + 12w_n = 4v_n + 15w_n = x_n$
On a donc montré que la suite X est constante.

b) Comme X est une suite constante, alors
$x_n = x_0 = 4v_0 + 15w_0 = 4 \times 2 + 15 \times 40 = 8 + 600 = 608$

Donc : $lim_{n\to+\infty} x_n = 4lim_{n\to+\infty} v_n + 15lim_{n\to+\infty} w_n = 608$.
Or, $lim_{n\to+\infty} v_n = lim_{n\to+\infty} w_n = l$, donc : $4l + 15l = 608$, soit : $19l = 608$.
V et W ont pour limite 32.

- Exercice 2 -

1. Pour tout entier naturel n,
$w_{n+1} = 4u_{n+1} - 6(n+1) + 15 = 4\left(\frac{1}{3}u_n + n - 1\right) - 6n - 6 + 15 = \frac{4}{3}u_n + 4n - 4 - 6n - 6 + 15 = \frac{4}{3}u_n - 2n + 5 = \frac{1}{3}(4u_n - 6n + 15) = \frac{1}{3}w_n$
W est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $w_0 = 4u_0 - 6 \times 0 + 15 = 19$

2. Donc : $w_n = 19 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Comme $w_n = 4u_n - 6n + 15$, alors :
$u_n = \frac{1}{4}(w_n + 6n - 15) = \frac{1}{4}(19 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6n - 15) = \frac{19}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{15}{4}$

3. $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1 = \frac{1}{3}(u_n + 3n - 3) = \frac{1}{12}(4u_n + 12n - 12) = \frac{1}{12}(4u_n - 6n + 18n + 15 - 27) = \frac{1}{12}(4u_n - 6n + 15) + \frac{1}{12}(18n - 27) = \frac{1}{12}w_n + \frac{3}{2}n - \frac{9}{4}$
On a montré que (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 19, donc $\frac{1}{12}w_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $\frac{19}{12}$
On pose $a_n = \frac{3}{2}n - \frac{9}{4}$. (a_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $-\frac{9}{4}$.
On en déduit donc que U est la somme d'une suite géométrique ($g_n = \frac{1}{12}w_n$) et d'une suite arithmétique a.

$s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = g_0 + a_0 + g_1 + a_1 + ... + g_n + a_n = g_0 + g_1 + ... + g_n + a_0 + a_1 + ... + a_n$

Calculons déjà $g_0 + g_1 + ... + g_n$ (la somme des n+1 premiers termes d'uns suite géométrique de premier terme $\frac{19}{12}$ et de raison $\frac{1}{3}$) :

$$g_0 + g_1 + ... + g_n = \frac{19}{12}\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{19}{12} \times \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = \frac{19}{8}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

Calculons ensuite $a_0 + a_1 + ... + a_n$ (c'est la somme des n+1 premiers termes d'une suite arithmétique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $-\frac{9}{4}$).
$a_0 + a_1 + ... + a_n = (n+1)\frac{2a_0 + nr}{2} = (n+1)\frac{2 \times (-\frac{9}{4}) + n\frac{3}{2}}{2} = (n+1)\frac{-\frac{9}{2} + \frac{3}{2}n}{2} = (n+1)(-\frac{9}{4} + \frac{3}{4}n) = -\frac{9}{4}n + \frac{3}{4}n^2 - \frac{9}{4} + \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}n^2 - \frac{6}{8}n - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}(n^2 - 2n - 3)$

Donc :
$s_n = \frac{19}{8}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) + \frac{3}{4}(n^2 - 2n - 3)$

4. On a montré que : $u_n = \frac{19}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{15}{4}$ Comme $\frac{1}{3} < 1$, alors $lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, donc :
$lim_{n\to+\infty}u_n = +\infty$

et
$lim_{n\to+\infty}s_n = +\infty$